

基于 Chi-square 的非高斯控制系统性能评估

张金芳¹, 乔贝贝^{1,2}

(1. 华北电力大学 控制与计算机工程学院, 北京 102206; 2. 国网冀北电力有限公司智能配电网中心, 河北 秦皇岛 066100)

摘要: 为了克服熵指标平移不变性的缺陷与卡方统计量无界的缺点, 对非高斯控制系统的性能评估展开研究, 提出 1 种基于 Chi-square 的性能评估指标, 同时为了更快速、准确地估计基准输出, 采用精英种群思想改进粒子群算法以获取系统未知参数和扰动噪声的概率密度函数, 并根据反馈不变量计算基准输出。该指标通过计算基准与实际输出概率分布间的 Chi-square 指标来反映给定系统的性能好坏, 能有效避免熵指标数据量大、计算时间长、均值漂移等缺点。对不同噪声下的单变量与多变量系统进行仿真验证, 结果表明辨识参数更接近真实值且迭代次数平均降低 73.4%; 在协方差矩阵具有相同迹的多变量场景下, 最小方差指标无法判别, 而 Chi-square 指标能显著区分分布状态(由 0.89 降至 0.45), 表明该指标具备较高的评估精度与敏感性, 应用场景也更广。

关键词: 非高斯系统; Chi-square 指标; 性能评估; 参数辨识

中图分类号: TP14 **文献标志码:** A **doi:** 10.13705/j.issn.1671-6833.2026.06.012

随着自动化技术在工业领域的广泛应用, 所需元件和传感器数量成倍增加。因此, 为了确保控制回路在需求状态下平稳运行, 及时、准确的性能评估是至关重要的。传统的性能评估主要基于最小方差控制(minimum variance control, MVC)基准, 还有学者采用 Hurst 指数评估系统并进行有效性验证^[1-4], 但方差与 Hurst 指数仅能表示低阶矩, 无法体现非高斯系统的高阶特性, 因此无法准确评估系统性能^[5]。

为此, 不少学者对基于最小熵控制的性能评估方法展开研究, Jiang 等^[6]研究了非高斯系统性能评估基准的获取问题, 通过计算反馈不变量的熵值确定性能评估基准。随后, Zhang 等^[7]将最小熵控制算法应用于串级控制系统, 并采用分布估计算法实现系统建模和扰动估计。同时为降低测量噪声对系统性能的影响, Ren 等^[8]提出动态数据校正方法, 以降低测量噪声对控制过程的影响。

对于本文所研究的非高斯控制系统而言, 其基准输出在系统模型参数与噪声数据确定后不变, 因此性能指标可视为实际输出逼近基准输出的程度, 所以理论上任何能够反映两个分布差异或相似度的

方法均可作为控制系统回路的性能指标^[9]。基于此, 本文提出一种基于 Chi-square 距离的性能指标, 该方法通过衡量期望与实际输出概率密度函数之间的差异, 具有计算简便、高可靠性的特点^[10]。

概率密度函数天然包含高阶特性, 在单变量系统下能够改善方差与 Hurst 指数仅包含低阶矩的缺陷, 同时在计算 Chi-square 指标时能够考虑到数据均值因素, 克服熵指标的平移不变性缺陷。并且由于多变量系统变量间具有复杂耦合关系^[11], 熵指标无法对其进行正确评估, 而联合概率密度函数能够充分考虑变量间的相关性, 并结合 Chi-square 指标实现多变量系统评估。

在实际评估过程中系统参数未知, 需要对模型进行参数辨识, 熵在非高斯系统参数辨识中具有一定优势^[12], 同时粒子群算法作为经典算法被不断改进并应用。因此为了获取更为准确的基准输出, 本文改进粒子群算法并应用到系统参数辨识。

本文的主要创新点为: 一是对智能算法进行改进, 提出 EPSO 算法以提高系统参数辨识效果; 二是提出适用于性能评估的 Chi-square 性能指标; 三是

收稿日期: 2026-04-03; 修订日期: 2026-05-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61603136)

作者简介: 张金芳(1977—), 女, 北京人, 华北电力大学副教授, 博士, 主要从事输出分布控制和控制系统性能评估等研究, E-mail: jfzhang@ncepu.edu.cn.

将 Chi-square 指标与联合概率密度函数结合应用于多变量系统性能评估并进行仿真验证。

1 基于 EPSO 算法的参数辨识

1.1 时间序列模型

本文采用二阶 Renyi 熵作为适应度函数^[13],通过改进粒子群算法进行参数辨识,以受控自回归滑动平均(controlled auto regressive moving average, CARMA)模型对系统进行表示:

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k - \tau) + C(z^{-1})v(k). \quad (1)$$

式中: $y(k)$ 表示系统的输出; $u(k)$ 表示系统控制器输出; $v(k)$ 表示系统独立同分布的未知扰动噪声; τ 表示系统延迟。

$$\begin{cases} A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_{na}z^{-na}; \\ B(z^{-1}) = b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_{nb}z^{-nb}; \\ C(z^{-1}) = 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_{nc}z^{-nc}. \end{cases} \quad (2)$$

式中: na , nb 和 nc 分别为对应阶次, a_i , b_i , c_i 分别为各阶次对应的常系数。

1.2 改进粒子群算法

粒子群算法从随机解出发,利用适应度值的大小评价得到新解的品质,通过迭代寻找最优解。然而由于粒子跟随个体历史最优值和群体历史最优值,算法容易陷入局部最优。本文对粒子群的速度项和位置项更新公式进行改进,得到了一种改进的粒子群算法(enhanced particle swarm optimization, EPSO),具体流程如图 1 所示:

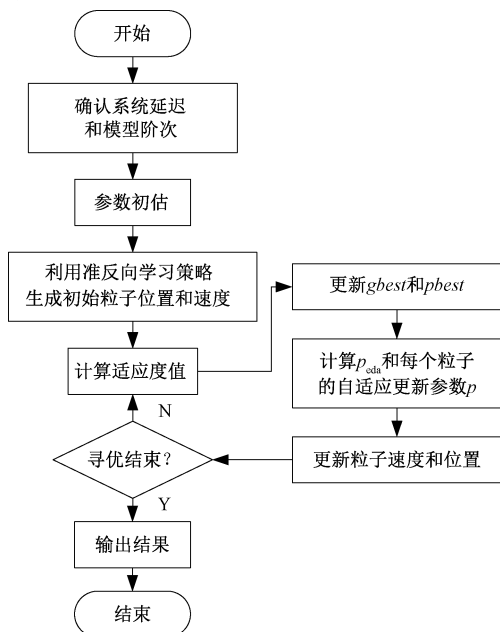


图 1 改进粒子群算法 EPSO 流程图

Figure 1 Improved particle swarm algorithm EPSO flowchart

EPSO 算法结合自适应选择策略思想^[14],根据不同情况选择与之相匹配的更新公式,表征粒子健康度的公式 p_i 为:

$$p_i = \frac{\exp(\text{fit}(x_i(t)))}{\exp(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \text{fit}(x_i(t)))}. \quad (3)$$

该公式能够表征该粒子适应度在当次迭代所有粒子中的好坏程度。根据其值 EPSO 算法为不同状态的粒子选择不同的更新公式,以平衡全局探索与局部开发能力并提高算法的寻优效率,具体计算公式如下,式中: p_a, p_b 为 0.45, 0.9; m_1 和 m_2 为学习因子; p_{eda} 为适应度值排名前 20% 粒子信息的各维平均值, r_1 和 r_2 为混沌映射出的 $[0, 1]$ 区间内随机数值, ω 为非线性变化的位置系数, V 为粒子速度, x 为粒子位置, t 为迭代次数,下标 i 为粒子位序, d 为参数位序。

(1) 若 $p_i > p_b$, 代表粒子的适应度低于种群平均水平,则采用以下公式在较大范围内进行全局搜索:

$$\begin{cases} V_{id}(t+1) = \omega V_{id}(t) + m_1 r_1 [0.5(pbest_{id} + gbest_d) - x_{id}(t)] + m_2 r_2 [0.5(pbest_{id} - gbest_d) - x_{id}(t)]; \\ x_{id}(t+1) = \omega x_{id}(t) + (1 - \omega) V_{id}(t+1). \end{cases} \quad (4)$$

(2) 若 $p_a < p_i < p_b$, 代表粒子在种群中处于中等水平,可结合粒子历史经验与精英种群提升收敛速度,并采用全局搜索模式加快寻优。其公式如下:

$$\begin{cases} V_{id}(t+1) = \omega V_{id}(t) + m_1 r_1 [pbest_{id} - x_{id}(t)] + m_2 r_2 [p_{eda} - x_{id}(t)]; \\ x_{id}(t+1) = \omega x_{id}(t) + (1 - \omega) V_{id}(t+1). \end{cases} \quad (5)$$

(3) 若 $p_i < p_a$, 当前粒子在整体种群内处于优秀水平,则通过群体历史最优值和精英粒子种群进行局部搜索。采用如下公式:

$$\begin{cases} V_{id}(t+1) = \omega V_{id}(t) + m_1 r_1 [gbest_d - x_{id}(t)] + m_2 r_2 [p_{eda} - x_{id}(t)]; \\ x_{id}(t+1) = x_{id}(t) + V_{id}(t+1). \end{cases} \quad (6)$$

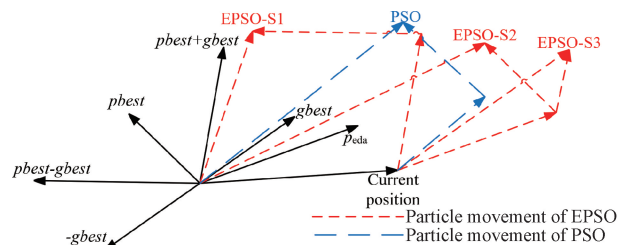


图 2 算法搜索域对比

Figure 2 Comparison of algorithmic search domains

如图 2 所示,与原始粒子群算法相比,该公式扩

大了 EPSO 算法的搜索域,且自适应更新策略能够加快算法前期的收敛速度并增强其局部搜索能力。

EPSO 算法的寻优详细步骤如下:

步骤 1 将系统写成上述输入输出模型形式,用互相关函数分析控制器输出 $u(t)$ 和实际输出 $y(t)$ 之间的相关性估计系统延迟;再利用 AIC 信息准则确定模型阶次。

步骤 2 模型参数初估。通过最小二乘辨识算法估计模型参数区间 $\theta_0 \pm 3\sigma_0$ 。

步骤 3 生成初始粒子群。在辨识区间内生成 m 个粒子,再利用准反向学习策略生成准反向解,比较原始解与准反向解的适应度值,将更优值作为初始粒子群。

步骤 4 生成初始粒子群速度。速度为区间 $[V_{\min}, V_{\max}]$ 内的任意值。

步骤 5 开始寻优。算法迭代过程如下:

While $I \leq n_{\max}$

(1) 计算上述生成的粒子群的适应度值 $fitness_i = [\theta_1^{(I)}, \theta_2^{(I)}, \dots, \theta_m^{(I)}]$

(2) If $I == 1$

①从 $fitness_i$ 中筛选出最优个体 $\theta_{\text{best}}^{(I)}$ 作为初始全局最优值 $gbest$ 。

②将 $fitness_i$ 中每个个体 $\theta_i^{(I)}$ 的参数作为初始个体最优值 $pbest_i$ 。

Else

①比较该次最优个体 $\theta_{\text{best}}^{(I)}$ 和全局最优值 $gbest$ 适应度值的大小,如果 $\theta_{\text{best}}^{(I)}$ 更优则更新全局最优值 $gbest$, 否则不变。

②将 $fitness_i$ 中每个个体 $\theta_i^{(I)}$ 的参数与其对应个体最优值 $pbest_i$ 进行比较,如果 $\theta_i^{(I)}$ 更优则更新个体最优值 $pbest_i$, 否则不变。

(3) 将上述粒子群的适应度值 $fitness_i$ 按大小进行排序,得到

$$fitness_i^* = [\theta_1^{(I)*}, \theta_2^{(I)*}, \dots, \theta_m^{(I)*}]$$

筛选出前 q 个适应度值较为优秀的粒子,并计

算其平均值得到中心点 p_{eda} 。

$$p_{\text{eda}} = \text{mean}(\theta_1^{(I)*}, \theta_2^{(I)*}, \dots, \theta_q^{(I)*})$$

(4) 计算每个粒子的适应度值与所有粒子适应度值均值的对比值 p_i 。

(5) 根据 p_i 选择上述粒子位置和速度项更新公式进行更新下一代粒子种群。

If 满足终止条件

前后两次迭代得到 $\theta_{\text{best}}^{(I-1)}$ 与 $\theta_{\text{best}}^{(I)}$ 差值小于 0.000 01, 结束循环;

Else

$I = I + 1$

End

End

步骤 6 得到参数估计 $gbest$ 和估计噪声概率密度函数。

EPSO 与传统粒子群算法对参数辨识对比结果如表 1 所示,体现出 EPSO 算法的辨识精度和速度都有较大提升。

2 基于 Chi-square 指标的单变量系统性能评估

2.1 Chi-square 性能指标

卡方距离 (Chi-square Distance) 是衡量两个分布之间差异的度量方法,常用于检验分布是否符合某一理论分布。当观察频率与期望频率越接近,卡方距离越小,表明两者差异越小;若两个分布完全一致,卡方距离为 0;反之,观察频率与期望频率差异越大,卡方距离越大。因此,卡方距离可用于量化两个概率分布之间的差异程度。

对于定义在同一域 S 上的两个离散概率分布 X 和 Y , 卡方距离的定义如下:

$$D_{\text{cs}}(X, Y) = \sum_{i=1}^n [(x_i - y_i)^2 / y_i] \quad (7)$$

式中: x_i 和 y_i 分别为两个离散分布在水平 i 处的概率。

表 1 算法参数辨识对比测试

Table 1 Comparison test of algorithm parameter identification

噪声	算法	寻优结果	迭代次数
真实值	N = 120	[-1 1 -1 -0.5]	/
Beta	PSO	[-1.000 2 1.034 1 -1.018 4 -0.439 1]	118
	EPSO	[-1.000 0 0.999 7 -0.997 5 -0.495 4]	53
Exponential	PSO	[-1.000 1 0.996 1 -1.009 8 -0.474 5]	111
	EPSO	[-1.000 0 1.001 1 -1.007 2 -0.498 0]	21
Gamma	PSO	[-1.000 6 1.080 0 -0.996 6 -0.518 3]	145
	EPSO	[-1.000 1 0.997 0 -0.992 1 -0.500 4]	23

但 $0 \leq D_{cs} \leq \infty$, 即卡方距离的值域无界, 难以直接用于性能评估。因此, 需对卡方距离进行改进以克服这一局限性, 使其值域位于 $[0, 1]$ 区间内, 从而更适合控制回路性能评估。

针对上述问题, 本文采用了改进卡方距离形式, 定义如下:

$$D(X, Y) = \sum_{i=1}^n [(x_i - y_i)^2 / (x_i + y_i)] \quad (8)$$

同时为了达到类似最小方差与最小熵指标归一化的特点, 本文采用的基于 Chi-square 距离改进的性能指标形式为:

$$D_{\text{chi-square}}(X, Y) = 0.5[2 - D(X, Y)] \quad (9)$$

因此改进指标具有以下性质:

1) 对称性: $D_{\text{chi-square}}(X, Y) = D_{\text{chi-square}}(Y, X)$ 。

2) 有界性: $0 \leq D_{\text{chi-square}} \leq 1$ 。当 X 与 Y 两者的相似度越高时, 指标就越接近 1, 代表系统的性能越接近期望的性能; 反之, 当两者之间的差异越大时, 指标就越趋向于 0, 代表系统的性能越差。

2.2 Chi-square 指标的计算方法

系统最优控制器下的基准输出 y_{\min} 可以通过前文改进的系统参数辨识智能算法寻优获取, 当前控制器下的实际输出 y_t 可以通过传感器和变送器采集, 因此当前控制系统的 Chi-square 指标定义为:

$$\begin{cases} D_{\text{chi-square}}(y_{\min}, y_t) = 0.5[2 - D(y_{\min}, y_t)]; \\ D(y_{\min}, y_t) = \sum_{i=1}^n [(y_{\min i} - y_{t i})^2 / (y_{\min i} + y_{t i})] \end{cases} \quad (10)$$

Chi-square 性能指标的计算需要以下几步:

1) 划分子区间, 首先找到变量的最大值和最小值并等分 n 份, 划分子区间为 $S = [S_1, S_2, \dots, S_n]$ 并记录子区间的大小 ds 。

2) 选取核函数并通过核密度估计求得输出的概率密度函数 p , 每个子区间对应的概率密度函数值记为 p_i 。

3) 求得每个子区间内概率密度函数的积分值即概率 $y_i = p_i \cdot ds$, 并按照式 (10) 计算 Chi-square 指标。

2.3 反馈控制系统性能评估方法

针对图 3 所示的反馈控制回路。其中: $G_c(z^{-1})$ 、 $G_p(z^{-1})$ 、 $G_v(z^{-1})$ 分别代表控制器、被控对象和扰动通道的传递函数表达式, $u(k)$ 、 $y(k)$ 、 $v(k)$ 分别代表控制器输出、实际输出以及未知随机扰动噪声。

采用 CARMA 模型将系统表示为:

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k - \tau) + C(z^{-1})v(k) \quad (11)$$

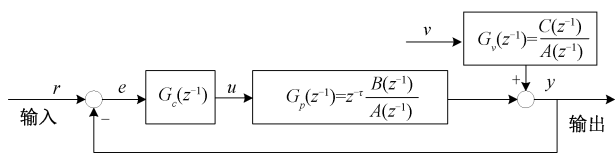


图 3 SISO 反馈控制回路结构框图

Figure 3 Block diagram of SISO feedback control loop structure

$$\begin{cases} A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + c_{na}z^{-na}; \\ B(z^{-1}) = b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_{nb}z^{-nb}; \\ C(z^{-1}) = 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} + \dots + c_{nc}z^{-nc} \end{cases} \quad (12)$$

式中: na, nb, nc 分别表示 $A(z^{-1}), B(z^{-1}), C(z^{-1})$ 的阶次; τ 为系统迟延, 设定系统输入值 r 为 0, 则系统输出 y_t 为

$$y_t = \frac{G_v}{1 + G_p G_c} v_t = \frac{G_v}{1 + z^{-\tau} G_p^* G_c} v_t \quad (13)$$

式中: G_p^* 表示无迟延的传递函数, 通过丢番图方程将扰动传函 G_v 分解, 并代入式 (13) 中可得

$$G_v(z^{-1}) = F(z^{-1}) + z^{-\tau} R(z^{-1}) = (1 + n_1z^{-1} + n_2z^{-2} + \dots + n_{\tau-1}z^{-(\tau-1)}) + z^{-\tau} R(z^{-1}) \quad (14)$$

式中: n_i 是常系数; R 是剩余的有理正则传递函数。

$$\begin{aligned} y(t) &= Fv(t) + Lv(t - \tau) = \\ &= \underbrace{(n_0 + n_1z^{-1} + \dots + n_{\tau-1}z^{-(\tau-1)})v(t)}_{\text{反馈不变量}} + \\ &= \underbrace{(n_{\tau}z^{-\tau} + n_{\tau+1}z^{-(\tau+1)} + \dots)v(t)}_{\text{反馈相关量}} \end{aligned} \quad (15)$$

由于控制器作用在系统时延之后, 式 (15) 中仅反馈相关量能够受到控制器的调节作用, 当控制器参数处于最优状态时反馈相关量为零, 此时系统输出仅包含反馈不变量, 其熵值达到最小值, 因此可将其作为基准值 y_{\min} 。

2.4 串级控制系统性能评估方法

与反馈控制系统相比, 串级控制系统通过分层控制策略显著提升了复杂工业过程的控制品质, 广泛应用于实际工业过程。由于副回路的存在, 串级系统具有更快的动态响应与更强的抗干扰能力, 因此研究串级控制系统的性能评估方法十分重要。

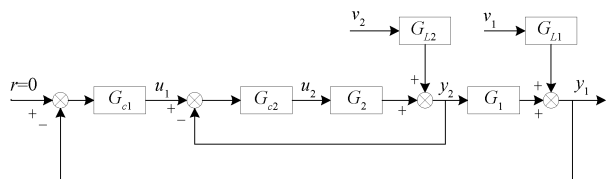


图 4 串级控制系统结构框图

Figure 4 Block diagram of serial control system

如图 4 所示, 系统的设定值为 0, $y_1(k)$ 和 $y_2(k)$ 分别代表主回路输出和副回路输出:

$$\begin{cases} y_1(k) = G_1 y_2(k) + G_{L1} v_1(k); \\ y_2(k) = G_2 u_2(k) + G_{L2} v_2(k). \end{cases} \quad (16)$$

式中: $u_1(k)$ 和 $u_2(k)$ 分别表示主控制器和副控制器的输出值, $v_1(k)$ 和 $v_2(k)$ 分别是主副回路的未知扰动。主回路被控对象传递函数 $G_1(z^{-1}) = G_1^*(z^{-1})z^{-d_1}$, 副回路的传递函数为 $G_2(z^{-1}) = G_2^*(z^{-1})z^{-d_2}$, d_1 和 d_2 为系统时延, $G_1^*(z^{-1})$ 和 $G_2^*(z^{-1})$ 分别为无延迟的主副被控对象, G_{L1} 和 G_{L2} 表示扰动传递函数。系统的主回路输出可表示为:

$$y_1(k) = \frac{(1 + G_2 G_{c2}) G_{L1} v_1(k) + G_1 G_{L2} v_2(k)}{1 + G_2 G_{c2} + G_1 G_2 G_{c1} G_{c2}}. \quad (17)$$

将 G_{L1} 和 G_{L2} 用丢番图方程分解如下:

$$\begin{cases} G_{L1} = Q_1 + R_1 z^{-d_1-d_2}; \\ G_{L2} = Q_2 + R_2 z^{-d_2}; \\ G_1^* Q_2 = S_2 + T_2 z^{-d_2}. \end{cases} \quad (18)$$

式中: $Q_1(z^{-1})$, $Q_2(z^{-1})$ 和 $S_2(z^{-1})$ 都是 z^{-1} 的多项式, 阶次分别为 $d_1 + d_2 - 1$, $d_2 - 1$, $d_2 - 1$, 其中,

$$\begin{cases} Q_1(z^{-1}) = Q_{10} + Q_{11}z^{-1} + Q_{12}z^{-2} + \dots + \\ \quad Q_{1(d_1+d_2-1)}z^{-(d_1+d_2-1)}; \\ S_2(z^{-1}) = S_{20} + S_{21}z^{-1} + S_{22}z^{-2} + \dots + \\ \quad S_{2(d_2-1)}z^{-(d_2-1)}. \end{cases} \quad (19)$$

将以上三个式子代入式(17)得

$$y_1(k) = \underbrace{Q_1(z^{-1})v_1(k) + S_2(z^{-1})z^{-d_1}v_2(k)}_{\text{反馈不变量}} + \underbrace{[M_1v_1(k) + M_2v_2(k)]z^{-d_1-d_2}}_{\text{反馈相关量}}. \quad (20)$$

串级系统主回路输出也可分为反馈相关量和反馈不变量两部分, 与反馈控制系统类似, 处于理论最优控制器时仅包含反馈不变量, 此时系统的输出达到最优值并且输出的熵值最小。串级控制系统中 Chi-square 指标的计算过程如下:

首先以改进的 EPSO 算法辨识出精确的模型参数和扰动分布, 通过丢番图方程计算反馈不变量的系数, 代入式(20)可得到系统的输出反馈不变量, 再采用仿真或测量器件获取实际输出, 最后通过式(10)计算得到串级控制系统的 Chi-square 指标。

3 基于 Chi-square 指标的多变量系统性能评估

多变量系统变量间复杂的耦合关系、过程噪声的多样性、数据的高维性以及系统自身复杂性和外部环境的不确定性, 给性能评估和控制器的改进带

来了巨大挑战。因此, 如何有效处理高维数据并提取有用信息是性能评估的关键。

此外, 传统性能评估方法通常只关注单一变量指标, 难以全面反映系统性能, 本文将 Chi-square 性能指标扩展至多变量系统的性能评估。在单变量系统中, Chi-square 性能指标衡量两个概率密度函数的差异; 而在多变量系统中, 则通过联合概率密度函数反映变量间的耦合关系, 对系统进行整体评估而非单一指标的评估, 同时将评估结果归一化使其更加具有直观性。

3.1 基准输出的获取

考虑如图 5 所示一般交互酉矩阵的多变量系统, T 为过程传递函数, N 为扰动传递函数, a_t 为噪声:

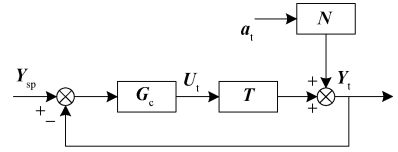


图 5 多输入多输出系统框图

Figure 5 Block diagram of multiple input multiple output system

$$Y_t = T U_t + N a_t = D^{-1} \tilde{T} U_t + N a_t. \quad (21)$$

式中: U_t 为控制器输出; D 为交互矩阵; \tilde{T} , \tilde{N} 为对应无延迟的传递函数; d 为系统延迟。式(21)两端同乘 $z^{-d}D$ 得:

$$\tilde{Y}_t = z^{-d} D Y_t = z^{-d} \tilde{T} U_t + z^{-d} D N a_t = z^{-d} \tilde{T} U_t + \tilde{N} a_t. \quad (22)$$

$$\tilde{N} = z^{-d} D N = \underbrace{F_0 + F_1 z^{-1} + \dots + F_{d-1} z^{-(d-1)}}_F + z^{-d} R_1. \quad (23)$$

式中: R_1 是有理正则传递函数矩阵。

$$\tilde{Y}_t = \underbrace{\tilde{T} U_{t-d} + R_1 a_{t-d}}_{\text{反馈相关量}} + \underbrace{F a_t}_{\text{反馈不变量}}. \quad (24)$$

对最优控制律有 $\tilde{T} U_{t-d} + R_1 a_{t-d} = 0$, 此时交互滤波输出 \tilde{Y}_t 的熵最小, 可作为性能评估的基准输出 $\tilde{Y}_t |_{\min}$ 。

$$\tilde{Y}_t |_{\min} = z^{-d} D Y_t |_{\min} = e_t = F_0 a_t + \dots + F_{d-1} a_{t-(d-1)}. \quad (25)$$

可根据公式反推得到系统的基准输出 $Y_t |_{\min}$:

$$Y_t |_{\min} = z^d D^{-1} (F_0 a_t + \dots + F_{d-1} a_{t-(d-1)}). \quad (26)$$

酉交互矩阵 D 满足 $D^{-1}(z) = D^T(z^{-1})$, 可得

$$D^{-1} = (D_0 z^d + \dots + D_{d-1} z)^{-1} = D_0^T z^{-d} + \dots + D_{d-1}^T z^{-1}. \quad (27)$$

$$Y_t |_{\min} = (D_0^T + \dots + D_{d-1}^T z^{d-1})(F_0 + \dots + F_{d-1} z^{-(d-1)}) a_t = (E_0 + E_1 z^{-1} + \dots + E_{d-1} z^{-(d-1)}) a_t \quad (28)$$

3.2 多变量系统最小方差指标

最优控制器下基准输出的方差为 Σ_{mv} :

$$\Sigma_{mv} = \text{var}(Y_t |_{\min}) = E_0 \Sigma_a E_0^T + \dots + E_{d-1} \Sigma_a E_{d-1}^T \quad (29)$$

因此基于目标函数的性能度量表示为多输入多输出 (multiple input multiple output, MIMO) 系统性能度量,通常将最小方差控制律下的输出协方差矩阵与待评估控制器下的输出协方差矩阵进行比较作为性能评估结果,其计算公式为:

$$\eta(d) = \frac{E[Y_t^T Y_t]_{\min}}{E[Y_t^T Y_t]} = \frac{\text{tr}(\Sigma_{mv})}{\text{tr}(E[Y_t^T Y_t])} \quad (30)$$

3.3 多变量系统 Chi-square 性能指标

多变量系统一般存在两个及两个以上的输出变量,且变量间相互耦合,因此方差与熵等适用于单个输出的统计量无法直接扩展到多变量系统,但概率密度函数在多维领域能够扩展到联合概率密度函数,它能够提供关于多个变量之间的联合分布信息,从而揭示变量之间的关联程度。

对于二维联合分布,其联合概率密度函数如图 6 所示。

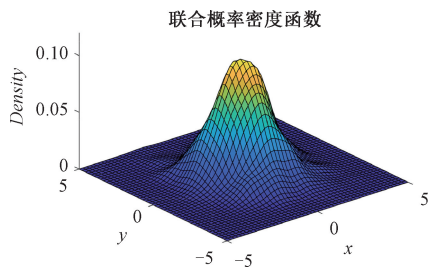


图 6 联合分布的概率密度函数图像

Figure 6 Probability density function image of the joint distribution

具有以下特点:

①非负性: $f(x, y) \geq 0$ 。

②在定义域内的积分为 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) f(x, y) dx dy = 1。$$

③若随机变量 X 与 Y 相互独立,则 $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$ 。如果两个变量的联合密度函数不能分解为各自的边缘密度函数的乘积,则变量间具有相关性。

因此,若已知系统的基准输出,并通过测量变送器获取待测输出,便能够使用 Chi-square 性能指标评估该系统。多变量系统下 Chi-square 性能指标计算的具体实施步骤如下:

1) 输出数据的获取:在确定系统模型参数后,

通过式(21)至(28)计算该系统的反馈不变量,将其作为基准输出 $y_{\min} = [y_{\min 1}; y_{\min 2}; \dots; y_{\min k}]$;通过传感器和变送器采集待评估控制器的实际输出 $y_t = [y_{t1}; y_{t2}; \dots; y_{tk}]$, k 为输出个数;

2) 划分子空间:确定系统基准输出 y_{\min} 与实际输出 y_t 的上下限 $[\min(y_t, y_{\min}), \max(y_t, y_{\min})]$, i 为对应变量序号,并将其等分为 n 个单位长度 dx_i ,以获得联合概率密度函数的子空间,这一步骤为后续概率密度函数的计算提供了基础;

3) 计算概率密度函数:通过 MATLAB 中的 mvksdensity 函数自动选取带宽,并计算基准与实际输出在各子空间的概率密度,得到系统基准与实际输出的联合概率密度函数,自动选取带宽能够确保概率密度估计的准确性,避免人为干预带来的误差。

4) 计算 Chi-square 指标:通过子空间大小与该子空间内的概率密度乘积得到每个子空间的概率,并通过式(10)计算 Chi-square 指标。这一步骤通过量化基准输出与实际输出分布的差异,为系统性能评估提供了直观的度量。

4 仿真验证

4.1 反馈控制系统

考虑模型与控制器如下所示的反馈控制系统:

$$\begin{cases} y_t = u(k-2) + v_t(1 - 0.5z^{-1} + 0.2z^{-2}) / (1 - z^{-1}); \\ G_c = 0.9 / (1 - 0.5z^{-1} - 0.5z^{-2}). \end{cases} \quad (31)$$

由于本文主要研究非高斯系统的性能评估,因此本次仿真采用三峰噪声,系统的延迟 $\tau = 2$,待辨识的参数组为 $\theta = [-1, 1, -1, -0.5, 0.2]$ 。

采用 EPSO 算法对系统参数进行辨识,再通过式(15)计算系统的反馈不变量,辨识后的噪声估计值、系统实际输出的概率密度函数如图 7 所示。

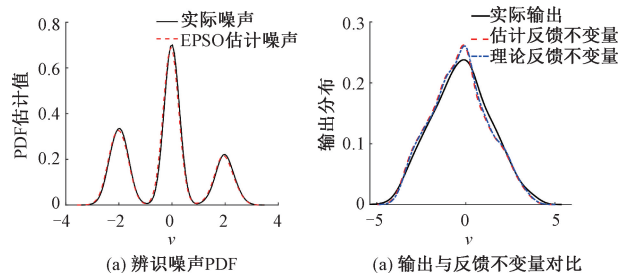


图 7 三峰噪声扰动下反馈系统的噪声估计和输出结果

Figure 7 Noise estimation and output results of the feedback system under three-peak noise disturbance

可以看出,系统的估计反馈不变量与理论反馈不变量十分贴合,表明 EPSO 算法对系统参数辨识的效果很好。根据实际输出和反馈不变量的估计值

与理论值,可以计算系统性能指标,本文采用几种经典指标与 Chi-square 指标对比,结果如表 2 所示。

表 2 性能评估结果

Table 2 Performance evaluation results

—	理论值	估计值
方差指标	0.938 8	0.937 2
有理熵指标	0.958 0	0.954 9
Renyi 熵指标	0.958 0	0.953 9
均值限定熵指标	0.938 5	0.936 1
Chi-square 指标	0.935 1	0.934 3

从表中数据可见,当基准输出与实际输出的均值差异较小时,Chi-square 指标与最小熵指标、均值限定熵指标的评估结果相近,验证了 Chi-square 指标的有效性。

4.2 串级控制系统

采用 CARMA 模型表示如下串级控制系统:

$$\begin{cases} y_1(k) = \frac{1 - 0.4z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}y_2(k-5) + \frac{1}{1 - 0.8z^{-1}}v_1(k); \\ y_2(k) = \frac{1 - 0.1z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}}u_2(k-2) + \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}v_2(k). \end{cases} \quad (32)$$

式中:主控对象为: $G_1 = \frac{1 - 0.4z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1}}z^{-5}$, 时延 $d_1 = 5$, 其中无延迟传递函数部分为: $G_1^* = (1 - 0.4z^{-1})/(1 - 0.8z^{-1})$; 同理, $G_2 = z^{-2}(1 - 0.1z^{-1})/(1 - 0.5z^{-1})$, $d_2 = 2$, $G_2^* = (1 - 0.1z^{-1})/(1 - 0.5z^{-1})$ 。

主扰动传递函数为: $G_{L1} = 1/(1 - 0.8z^{-1})$; 副扰动传递函数为: $G_{L2} = 1/(1 - 0.5z^{-1})$ 。

G_{c1} 和 G_{c2} 表示系统的主副控制器,本文选取 $G_{c1} = (0.33 - 0.2z^{-1})/(1 - z^{-1})$, $G_{c2} = 0.1$ 。

$v_1(k)$ 和 $v_2(k)$ 分别表示主回路和副回路的噪声扰动,可得:

$$\begin{cases} G_{L1} = 1 + 0.8z^{-1} + 0.8^2z^{-2} + 0.8^3z^{-3} + \dots + \\ \quad 0.8^6z^{-6} + \frac{0.8^7z^{-7}}{1 - 0.8z^{-1}}; \\ G_{L2} = 1 + 0.5z^{-1} + \frac{0.5^2z^{-2}}{1 - 0.5z^{-1}}. \end{cases} \quad (33)$$

并将 G_1^* 和 Q_2 相乘可得

$$\begin{cases} Q_1 = 1 + 0.8z^{-1} + 0.8^2z^{-2} + 0.8^3z^{-3} + \dots \\ \quad + 0.8^6z^{-6}; \\ Q_2 = 1 + 0.5z^{-1}. \end{cases} \quad (34)$$

$$G_1^* Q_2 = (1 - 0.4z^{-1})(1 + 0.5z^{-1})/(1 - 0.8z^{-1}) = 1 + 0.9z^{-1} + 0.52z^{-2}/(1 - 0.8z^{-1}). \quad (35)$$

$$S_2 = 1 + 0.9z^{-1}. \quad (36)$$

由上式可得该串级控制系统的输出反馈不变量为:

$$y_b(k) = Q_1(z^{-1})v_1(k) + S_2(z^{-1})z^{-d_1}v_2(k) = (1 + 0.8z^{-1} + \dots + 0.8^6z^{-6})v_1(k) + (1 + 0.9z^{-1})z^{-5}v_2(k). \quad (37)$$

反馈不变量 $y_b(k)$ 表示为系统期望输出,可作为性能评估的基准输出,由于本文主要研究的是非高斯扰动下控制系统的性能评估,所以仿真时主回路扰动采用贝塔噪声,副回路扰动采用双峰噪声,将系统化为 CRAMA 模型得到待辨识参数和主副回路噪声 PDF 估计,并计算不同指标评估结果如表 3。

表 3 双峰与 beta 噪声扰动下主副回路的性能评估指标

Table 3 Performance evaluation metrics for primary and secondary circuits under bimodal and beta noise perturbations

—	主回路		副回路	
	理论值	估计值	理论值	估计值
最小方差指标	0.490 8	0.492 0	0.881 4	0.878 5
有理熵指标	0.857 1	0.857 2	0.948 8	0.952 9
Renyi 熵指标	0.882 7	0.877 0	0.963 9	0.965 7
均值限定熵指标	0.641 6	0.626 0	0.702 5	0.693 4
Chi-square 性能指标	0.744 1	0.726 4	0.697 6	0.675 3

可以得出当主回路扰动采用贝塔噪声,副回路扰动采用双峰噪声时,主副回路的基准输出呈现出较为明显的非高斯特性且伴有一定的均值偏移,此时主回路最小方差指标的评估结果要比其他指标低,不能够正确评估。

同时由于均值偏移的原因,副回路最小熵指标的评估结果要更高,验证了熵指标平移不变性的不足之处;均值限定熵指标虽然能在一定程度上改善熵指标的这一缺陷,但均值变化所占的比重仍有待商榷。

而 Chi-square 性能指标能够兼顾形状与均值的变化,直接通过衡量基准输出与实际输出 PDF 之间的差异得到综合评估结果,验证了 Chi-square 性能指标在非高斯扰动下对串级控制系统性能评估的有效性。

4.3 多变量系统

4.3.1 数值验证

传统的 MIMO 控制性能基准基于协方差矩阵对角线元素之和进行比较,忽略了不同过程变量之间的相关性。为了说明这一点,考虑输出符合如下协方差矩阵的 2 组例子:

例 1:

$$\begin{cases} f_1 = \text{var}(F_1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \\ f_2 = \text{var}(F_2) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (38)$$

例 2:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_1 = \text{var}(F_1) = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{f}_2 = \text{var}(F_2) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (39)$$

\mathbf{f}_1 与 \mathbf{f}_2 是具有相同迹和行列式的协方差矩阵,图 8 分别为两组例子的输出数据散点图与联合概率密度函数。显然,过程数据分布发生了变化。

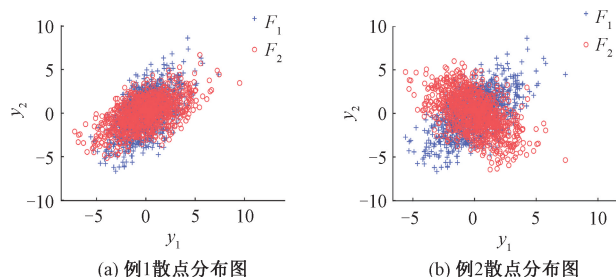


图 8 例 1 与例 2 的散点图

Figure 8 Scatter plots of Example 1 and Example 2

在上述两种情况下数据分布均呈椭圆形,随着协方差矩阵表示的变量间关系变化,椭圆的方向会发生相应变化。例 1 中一个变量的方差增加而另一个变量的方差减少;而例 2 中两个变量数据序列间的协方差值保持不变,但非对角线上的元素从正变为负,表明联合数据分布的方向发生了变化。

分别用最小方差指标和 Chi-square 指标对这两组例子进行性能评估,即将输出 F_1 看作基准输出, F_2 看作待评估的系统输出,评估结果如表 4。

表 4 输出协方差矩阵具有相同迹和行列式的评估结果

Table 4 Output covariance matrix evaluated with the same trace and determinant

指标类型	例 1	例 2
最小方差指标	1.0	1.0
Chi-square 指标	0.887 7	0.449 7

根据表中数据,MIMO 控制系统性能出现了显著变化,但输出协方差矩阵的迹变化却很微小,因此最小方差指标未能反映此类数据分布或系统操作的变化,说明其在多变量系统性能评估中具有局限性;而 Chi-square 指标与传统基于迹的指标相比更好地捕捉到了输出分布的变化,验证了 Chi-square 指标在多变量系统此类情况下的有效性。

4.3.2 系统仿真

本节在仿真过程中考虑三输入双输出控制系统,旨在评估系统回路之间的相互作用逐渐增加时控制器性能的变化。

三输入双输出多变量过程被建模为:

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{T}(z^{-1})\mathbf{u}(k) + \mathbf{N}(z^{-1})\mathbf{a}(k). \quad (40)$$

其中 \mathbf{T} 和 \mathbf{N} 分别为开环和扰动传递函数矩阵。

$$\begin{cases} \mathbf{T}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{z^{-1}}{1 - 0.4z^{-1}} & \frac{K_{12}z^{-2}}{1 - 0.1z^{-1}} & \frac{0.2z^{-2}}{1 - 0.5z^{-1}} \\ \frac{0.7z^{-1}}{1 - 0.2z^{-1}} & \frac{z^{-2}}{1 - 0.8z^{-1}} & \frac{0.8z^{-2}}{1 - 0.7z^{-1}} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{N}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} & \frac{-0.6z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} \\ \frac{0.5z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} & \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (41)$$

设定的控制器为

$$\mathbf{Q}(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{0.5 - 0.2z^{-1}}{1 - 0.5z^{-1}} & 0 \\ 0 & \frac{0.25 - 0.2z^{-1}}{1 - 0.25z^{-2}} \\ \frac{0.6 - 0.1z^{-1}}{1 - z^{-1}} & \frac{0.6 - 0.1z^{-1}}{1 - z^{-1}} \end{bmatrix}. \quad (42)$$

将 K_{12} 从 0 变化到 10,用以改变两个回路之间的相互作用。

根据 \mathbf{T} 计算出酉交互矩阵 \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -0.819 \ 2z & -0.573 \ 5z \\ -0.573 \ 5z^2 & 0.819 \ 2z^2 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

因此可推导系统的基准输出即反馈不变量 \mathbf{Y}_1 :

$$\mathbf{Y}_1 = \begin{pmatrix} 1 + 0.047z^{-1} & -0.6 - 0.333 \ 6z^{-1} \\ 0.5 - 0.067 \ 1z^{-1} & 1 + 0.476 \ 5z^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{a}_1. \quad (44)$$

由于本文主要研究非高斯系统的性能评估,因此采用服从互不相关的韦伯噪声。使 K_{12} 从 0 变化到 10,系统的实际输出由 MATLAB 仿真得出,使用 3 000 个数据样本计算最小方差指标与 Chi-square 指标,各阶段性能变化如图 9 与图 10 所示:

当噪声为非高斯噪声时,其基准与实际输出不再服从高斯分布,并且随着 K_{12} 的不断增大,实际输出与基准输出分布重合度不断减小即两者的差异越来越大,因此得到了如图 10 所示的 Chi-square 指标性能变化。但最小方差指标仅仅使用协方差矩阵的迹,导致评估结果为先增后减的趋势,验证了 Chi-square 指标评估非高斯多变量系统的可行性。

5 结论

本文聚焦于非高斯控制系统性能评估方法的研究,为确保基准输出的精确性,在参数辨识环节引入智能算法并改进粒子群算法,经 3 种噪声扰动测试

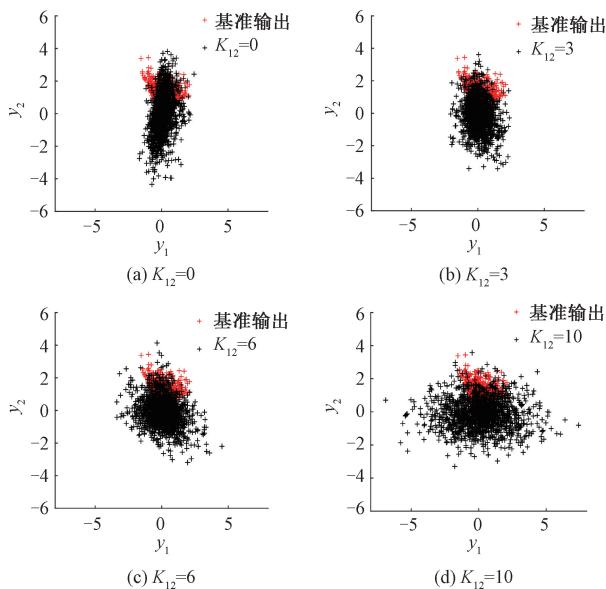


图 9 K_{12} 由 0 到 10 的散点图

Figure 9 Scatter plot of K_{12} from 0 to 10

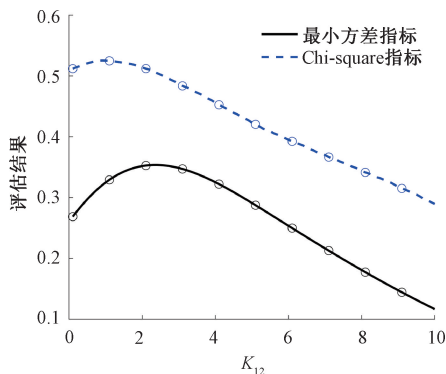


图 10 三入双出系统韦伯噪声下性能评估对比图

Figure 10 Comparative performance evaluation of three-input-two-output systems under weber noise

下,辨识参数更接近真实值且迭代次数平均降低 73.4%。针对 Chi-square 距离无界的特点对其形式进行改进提出了 Chi-square 指标,并在串级系统的仿真验证中,考虑到均值的影响因素,评估结果比最小熵指标降低了 0.27 左右;同时,在多变量系统中能够考虑到变量之间的相关性,从而进行合理评估。但当变量维度增加后,子空间数量也会相应增加,导致落在每个子空间的概率均很小,从而影响最终的评估结果,这一局限性需要进行后续深入研究解决。

参考文献:

[1] Lu Yu. Application of performance monitoring of control loop in improving digitalization and intelligence of plant production [J]. Petrochemical Industry Technology, 2024, 31(5): 238-240. [鹿雨. 控制回路性能监测在提高装置生产数字化、智能化上的应用[J]. 石化技术, 2024, 31(5): 238-240.]

[2] Zhang Jinfang, Zhou Yulong, Wang Tongyu, et al. Performance evaluation of cascade non-Gaussian systems based on image processing index[J]. Journal of Zhengzhou University (Engineering Science), 2025, 46(2): 75-81. [张金芳, 周宇龙, 王童雨, 等. 基于图像处理指标的串级非高斯系统性能评估[J]. 郑州大学学报(工学版), 2025, 46(2): 75-81.]

[3] Zhang Jinfang, Wu Di. Performance assessment of non-Gaussian control systems based on mixture correntropy [J]. Entropy, 2019, 21(11): 1069.

[4] Shan Gangsheng, Wang Zhiguo, Liu Fei. PID parameters optimization based on Hurst index [J]. Control and Instruments in Chemical Industry, 2023, 50(2): 158-164. [单港生, 王志国, 刘飞. 基于 Hurst 指数的 PID 控制参数优化 [J]. 化工自动化及仪表, 2023, 50(2): 158-164.]

[5] Wang Yinsong, Ma Pingyan. A performance evaluation method of MIMO system based on improved Mahalanobis distance [J]. China Measurement & Test, 2020, 46(6): 101-107. [王印松, 马娉妍. 一种基于改进马氏距离的 MIMO 系统性能评价方法 [J]. 中国测试, 2020, 46(6): 101-107.]

[6] Zhang Jianhua, Jiang Man, Chen J. Minimum entropy-based performance assessment of feedback control loops subjected to non-Gaussian disturbances [J]. Journal of Process Control, 2014, 24(11): 1660-1670.

[7] Zhang Qian, Wang Yagang, Lee F F, et al. Performance assessment of cascade control system with non-Gaussian disturbance based on minimum entropy [J]. Symmetry, 2019, 11(3): 379.

[8] Ren Mifeng, Zhang Wen, Chen J, et al. Performance assessment for non-Gaussian systems by minimum entropy control and dynamic data reconciliation [J]. Journal of the Franklin Institute, 2022, 359(8): 3930-3950.

[9] Huang Guodou, Zhang Jinfang, Huang Junxiong, et al. Bhattacharyya coefficient-based performance assessment for non-Gaussian stochastic systems [J]. Computer Simulation, 2023, 40(6): 327-332. [黄国豆, 张金芳, 黄俊雄, 等. 基于巴氏系数的非高斯随机系统性能评估 [J]. 计算机仿真, 2023, 40(6): 327-332.]

[10] Ren Haiping, Xiao Shixiao, Zhou Hui. A Chi-square distance-based similarity measure of single-valued neutrosophic set and applications [J]. International Journal of Computers Communications & Control, 2019, 14(1): 78-89.

[11] Wang Fucheng, Lee C H. Hybrid disturbance response decoupling for multivariable systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2024, 69(10): 7277-7284.

[12] Huang Guodou, Zhang Jinfang, Lu Jiahui, et al. Mini-

mum entropy criterion-based performance assessment of non-Gaussian cascade control loop[J]. Control Engineering of China, 2024, 31(8): 1436-1444. [黄国豆, 张金芳, 卢家辉, 等. 最小熵基准的非高斯串级控制回路性能评估[J]. 控制工程, 2024, 31(8): 1436-1444.]

[13] Zhou Jinglin, Jia Yiqing, Jiang Huixia, et al. Non-

Gaussian systems control performance assessment based on rational entropy[J]. Entropy, 2018, 20(5): 331.

[14] Ren Shaohui, Sun Tao, Yu Qingrui, et al. ASPSO: an adaptive acceleration coefficient particle swarm optimization algorithm with sigmoid inertia weight[J]. Cluster Computing, 2025, 28(14): 882.

Performance Assessment of Non-Gaussian Control Systems Based on Chi-square

ZHANG Jinfang¹, QIAO Beibei^{1,2}

(1. School of Control and Computer Engineering, North China Electric Power University, Beijing 102206, China; 2. State Grid Jibei Electric Power Company Limited Smart Distribution Network Center, Qinhuangdao 066100, China)

Abstract: A study was conducted to address the shift-invariance defect of entropy-based indices and the unboundedness problem of the chi-square statistic in evaluating the performance of non-Gaussian control systems. A Chi-square-based performance index was proposed, and the particle swarm optimization algorithm was enhanced with an elite-population strategy to enable faster and more accurate estimation of the benchmark output by identifying unknown system parameters and the probability density functions of disturbance noise; the benchmark output was subsequently computed using feedback invariants. The proposed index assessed system performance by calculating the Chi-square distance between the benchmark and actual output distributions, effectively mitigating the drawbacks of entropy indices, including large data requirements, long computation time, and sensitivity to mean shifts. Simulation studies conducted on univariate and multivariate systems under different noise conditions showed that the identified parameters were closer to the true values and that the required number of iterations decreased by an average of 73.4%. In multivariate scenarios where covariance matrices shared the same trace, the minimum-variance index was unable to differentiate among distributional states, whereas the Chi-square index provided significant discrimination (from 0.89 to 0.45), demonstrating its higher evaluation accuracy, greater sensitivity, and broader applicability.

Keywords: non-gaussian systems; chi-square index; performance assessment; parameter identification