

文章编号:1671-6833(2023)06-0061-07

# 基于三次样条插值的几何精确曲梁单元

张志刚, 马新旋, 王才东, 郑华栋, 王良文

(郑州轻工业大学 河南省机械装备智能制造重点实验室, 河南 郑州 450002)

**摘要:** 为了对包含大变形梁的柔性多体系统进行精确建模和动力学仿真分析, 基于三次样条插值构造了一种总体参数少且方便与 CAD 几何模型融合的大变形平面曲梁单元。首先, 选取单元节点位置矢量和首末两端节点处位置矢量的弧长导数为整体参数, 采用三次样条插值函数对梁的形心线运动进行近似; 其次, 在充分考虑细长梁变形基础上, 利用 Euler-Bernoulli 梁变形假设由插值得到的形心线切向确定了梁截面的转动; 最后, 依据几何精确梁理论推导出了梁的轴向应变和曲率, 基于虚功率原理推导出了平面曲梁单元的质量矩阵、节点力列阵和广义外力列阵, 并得到了总体切线刚度矩阵。相较于现有大变形平面梁单元, 所提单元总体参数大幅降低。此外, 由于构造的单元耦合变形场严格保证了梁截面与形心线切向的垂直关系, 这从根本上避免了剪切闭锁现象在应用中的出现。在数值算例部分, 通过对平面梁静力学几何非线性问题和动力学刚柔耦合问题典型算例求解及对比表明: 所提出的几何精确曲梁单元在保证计算精度的同时提高了计算效率。

**关键词:** 几何精确梁; 三次样条; 曲梁; 几何非线性; 刚柔耦合

**中图分类号:** O302 **文献标志码:** A **doi:** 10.13705/j.issn.1671-6833.2023.03.002

随着新材料新技术的飞速发展, 大变形部件的工程应用也越来越多, 如风机叶片、大展弦比机翼、航天器可展天线和太阳能帆板等, 甚至出现了利用弹性变形传递运动、力和能量的新型机构<sup>[1-2]</sup>。针对大变形梁建模问题, 在多体系统动力学领域先后发展形成了两类最具代表性的方法: 几何精确梁理论和绝对节点坐标方法 (ANCF)。

几何精确梁理论<sup>[3-5]</sup>在刚性截面假设基础上引入大转动参数描述截面转动, 也被称为大转动矢量法<sup>[6]</sup>。基于此方法提出的梁单元通常具有单元参数少、节点力物理含义清晰等优点, 但由于常用大转动参数如欧拉角、卡尔丹角、罗德里格斯参数和转动矢量等是伪矢量, 对这类参数独立插值会破坏应变独立性<sup>[7]</sup>。针对这一问题, Zupan 等<sup>[8]</sup>将欧拉四元数用作截面大转动的描述, 并推导了三维几何精确梁的平衡微分方程及其弱形式; Ghosh 等<sup>[9]</sup>在四元数描述基础上提出了球面线性插值的梁截面转动离散策略。四元数应用可以保证几何精确梁理论中曲率应变的客观性, 但截面转动独立插值方法构造出来的单元属于 Timoshenko 梁模型, 该方法用于求解

细长梁问题时会遇到剪切闭锁<sup>[10]</sup>。针对空间细长梁, Zhao 等<sup>[11]</sup>构造了一种严格满足梁截面与形心线垂直关系的几何精确梁单元, 避免了剪切闭锁的出现; Fan 等<sup>[12]</sup>利用四元数球面线性插值得到梁截面转动场, 在忽略轴向应变的前提下, 依据 Euler-Bernoulli 梁变形假设由转动积分得到了形心位移, 其中, 三维梁单元中间节点参数仅包含表征截面转动的欧拉四元数, 因而总体参数大幅减少。对于平面问题, 梁内部节点只有截面方向角一个自由度<sup>[13-14]</sup>。但由于位移场需要通过转动场积分递推得到, 计算量大, 且处理节点位移约束时也较为烦琐。

Shabana<sup>[15]</sup>提出的 ANCF 梁单元采用无转动参数方法, 通过选取表征梁截面变形和方向的位置梯度矢量代替转动参数作为单元参数, 避免了大转动描述引发的数值问题。此外, ANCF 梁单元节点力计算程式化高, 并且具有质量矩阵为常数阵、离心力和科氏力为 0、约束方程描述简单等优点。然而, ANCF 梁单元节点参数通常成倍于传统梁单元, 由此引入的截面变形与拉压、弯扭耦合等复杂高阶模态也会严重影响仿真计算效率。冗余自由度的存在

收稿日期: 2022-11-03; 修订日期: 2022-12-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (52075500, 11602228); 河南省高校科技创新人才支持计划项目 (22HASTIT023)

作者简介: 张志刚 (1984—), 男, 河南开封人, 郑州轻工业大学讲师, 博士, 主要从事多体系统动力学与控制、机械系统动力学及有限单元法等相关研究, E-mail: zhigangzhang@foxmail.com。

引用本文: 张志刚, 马新旋, 王才东, 等. 基于三次样条插值的几何精确曲梁单元 [J]. 郑州大学学报 (工学版), 2023, 44 (6): 61-67. (ZHANG Z G, MA X X, WANG C D, et al. A geometrically exact curved beam element based on cubic spline interpolation [J]. Journal of Zhengzhou University (Engineering Science), 2023, 44 (6): 61-67.)

也赋予了 ANCF 单元描述复杂几何构型的能力,其单元几何描述与计算机辅助设计(CAD)通用的 B 样条和非均匀有理 B 样条(NURBS)之间存在线性映射关系<sup>[16]</sup>,可以方便地实现 ANCF 网格与 CAD 模型的转换,而这恰是现有几何精确梁单元不具备的。

本文从减少整体参数、方便与 CAD 几何描述融合出发,提出了一种几何精确平面曲梁单元。基于三次样条插值构造了形心线变形场,并根据 Euler-Bernoulli 梁变形理论,由形心线切向确定了梁截面的方向。由于单元内部节点参数仅包含位置矢量而不含转动参数,因此单元自由度大幅降低。本文单元精度和求解效率通过典型算例加以验证。

## 1 平面曲梁的三次样条插值

曲梁在适应特定空间环境、满足特殊工况等方面具有独特优势,在工程中有重要应用。依据刚性截面假设,梁的几何构型可由形心线运动与截面转动描述。对于考虑初始弯曲的平面 Euler-Bernoulli 梁,选取节点处的位置矢量  $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n$  和首末两端节点的轴向位置梯度矢量  $\mathbf{r}_{0,s}, \mathbf{r}_{n,s}$  为总体参数,如图 1 所示。

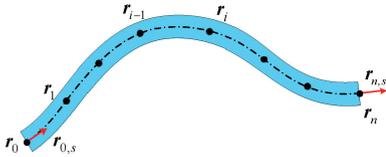


图 1 平面曲梁的几何构型

Figure 1 Geometrical configuration of the planar curved beam

Euler-Bernoulli 梁的截面始终与形心线切向垂

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} L_1 \mathbf{I} & 2L_1(1+K_1)\mathbf{I} & K_1 \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & L_2 \mathbf{I} & 2L_2(1+K_2)\mathbf{I} & K_2 \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & L_{n-1} \mathbf{I} & 2L_{n-1}(1+K_{n-1})\mathbf{I} & L_{n-1}K_{n-1} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}; \quad (4)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3\mathbf{I} & 3(1-K_1^2)\mathbf{I} & 3K_1^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -3\mathbf{I} & 3(1-K_2^2)\mathbf{I} & 3K_2^2 \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -3\mathbf{I} & 3(1-K_{n-1}^2)\mathbf{I} & 3K_{n-1}^2 \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

因此有  $[\mathbf{q}_{r,s}] = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{q} = \mathbf{H}^s \mathbf{q}$ , 第  $i$  号节点位置矢量的弧长导数可以表示为  $\mathbf{r}_{i,s} = \mathbf{H}_i^s \mathbf{q}$ 。同样节点  $i$  处的位置矢量也可以表示为  $\mathbf{r}_i = \mathbf{H}_i^r \mathbf{q}$ , 其中  $\mathbf{H}_i^r$  为由整体参数排列确定的布尔矩阵。将其代入形心线插

直,这里采用三次样条插值近似梁的形心线。由三次样条性质可知,在第  $i$  段弧长坐标  $s \in [s_{i-1}, s_i]$  上任一点的位置矢量  $\mathbf{r}$  可以表示为

$$\mathbf{r}^i(\xi) = N_1^0 \mathbf{r}_{i-1} + N_2^0 \mathbf{r}_i + L_i(N_1^1 \mathbf{r}_{i-1,s} + N_2^1 \mathbf{r}_{i,s}). \quad (1)$$

式中:  $L_i = s_i - s_{i-1}$  为第  $i$  段对应弧长;  $\xi = (s - s_{i-1})/L_i$  为归一化参数。Hermite 基函数为

$$\begin{cases} N_1^0 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3; \\ N_2^0 = 3\xi^2 - 2\xi^3; \\ N_1^1 = \xi - 2\xi^2 + \xi^3; \\ N_2^1 = -\xi^2 + \xi^3. \end{cases} \quad (2)$$

除端部节点外,式(1)中出现的中间节点参数  $\mathbf{r}_{i,s}$  需要利用样条函数连续性条件确定。根据三次样条函数性质可知,中间节点处满足二阶导数连续,即

$$\begin{bmatrix} L_i \mathbf{I} & 2L_i(1+K_i)\mathbf{I} & L_i K_i \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{i-1,s} \\ \mathbf{r}_{i,s} \\ \mathbf{r}_{i+1,s} \end{pmatrix} = 3 \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & (1-K_i^2)\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_{i-1} \\ \mathbf{r}_i \\ \mathbf{r}_{i+1} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

式中:  $K_i = L_i/L_{i+1}$  为相邻梁段的弧长比。

将式(3)与梁首末两节点处已给定的位置梯度矢量  $\mathbf{r}_{0,s}$  和  $\mathbf{r}_{n,s}$  统一记做  $\mathbf{A}[\mathbf{q}_{r,s}] = \mathbf{B}\mathbf{q}$ , 其中  $\mathbf{q} = [\mathbf{r}_0^T \ \mathbf{r}_1^T \ \cdots \ \mathbf{r}_n^T \ \mathbf{r}_{0,s}^T \ \mathbf{r}_{n,s}^T]^T$  为总体参数列阵,  $[\mathbf{q}_{r,s}] = [\mathbf{r}_{0,s}^T \ \mathbf{r}_{1,s}^T \ \cdots \ \mathbf{r}_{n,s}^T]^T$  为节点轴向位置梯度列阵,系数矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  分别为

值式(1)可得

$$\mathbf{r}^i(\xi) = \mathbf{N}_r^i \mathbf{q}. \quad (6)$$

其中第  $i$  段形心线的插值函数矩阵  $\mathbf{N}_r^i$  为

$$\mathbf{N}_r^i = N_1^0 \mathbf{H}_{i-1}^r + N_2^0 \mathbf{H}_i^r + L_i(N_1^1 \mathbf{H}_{i-1}^{r,s} + N_2^1 \mathbf{H}_i^{r,s}). \quad (7)$$

## 2 平面曲梁的整体控制方程

在上述整体形心线三次样条插值基础上,依据几何精确梁理论推导平面曲梁的整体动力学方程。

### 2.1 内力虚功率

根据 Euler-Bernoulli 梁变形假设,梁截面始终与形心线切向保持垂直。在平面曲梁第  $i$  段内,记形心线上任意点处的切向单位矢量为  $\mathbf{n}^i$ ,法向单位矢量为  $\mathbf{t}^i$ ,如图 2 所示。

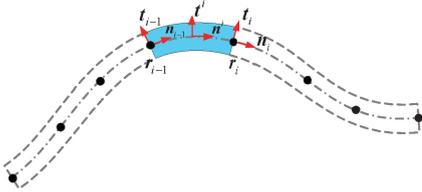


图 2 平面曲梁内第  $i$  段单元

Figure 2 The  $i$ th element in the planar curved beam

由形心线插值函数(式(6))可知,任意点处的单位切向量可以表示为  $\mathbf{n}^i(\xi) = \mathbf{r}'_{i,s} / \|\mathbf{r}'_{i,s}\|$ ,而单位法向量可以表示为  $\mathbf{t}^i(\xi) = \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{n}^i$ ,其中  $\tilde{\mathbf{I}} = [0 \quad -1; 1 \quad 0]$  为平面  $90^\circ$  旋转矩阵。

梁单元内任意点处的轴向应变  $\varepsilon^i$  和形心线曲率  $\kappa^i$  可以表示为

$$\begin{cases} \varepsilon^i(\xi) = (\mathbf{n}^i)^T \mathbf{r}''_{i,s} - 1; \\ \kappa^i(\xi) = (\mathbf{t}^i)^T \mathbf{n}''_{i,s}. \end{cases} \quad (8)$$

据此可将平面 Euler-Bernoulli 梁的内力虚功率表示为

$$\delta p_s = \sum_{i=1}^n \left[ L_i \int_0^1 (\delta \dot{\varepsilon}^i EA_b (\varepsilon^i - \varepsilon_0^i) + \delta \dot{\kappa}^i EI_b (\kappa^i - \kappa_0^i)) d\xi \right]. \quad (9)$$

式中:  $\varepsilon_0^i$  和  $\kappa_0^i$  为初始构型对应的轴向应变和曲率,对于直梁其值均为零。

利用积分与求和运算的可交换性整理得到平面曲梁的内力虚功率为

$$\delta p_s = (\delta \dot{\mathbf{q}})^T \int_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^n L_i \left[ \left( \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T EA_b (\varepsilon^i - \varepsilon_0^i) + \left( \frac{\partial \kappa^i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T EI_b (\kappa^i - \kappa_0^i) \right] \right\} d\xi = (\delta \dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{F}_s. \quad (10)$$

其中节点力列阵为

$$\mathbf{F}_s = \int_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^n L_i \left[ \left( \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T EA_b (\varepsilon^i - \varepsilon_0^i) + \left( \frac{\partial \kappa^i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T EI_b (\kappa^i - \kappa_0^i) \right] \right\} d\xi. \quad (11)$$

### 2.2 切线刚度阵

曲梁的切线刚度阵  $\mathbf{K}$  可以通过对广义节点力

列阵(式(11))求偏导得到,即  $\mathbf{K} = \partial \mathbf{F}_s / \partial \mathbf{q} = \mathbf{K}_{i1} + \mathbf{K}_{i\sigma}$ ,其中  $\mathbf{K}_{i1}$  为材料刚度矩阵,  $\mathbf{K}_{i\sigma}$  为几何刚度矩阵。

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{i1} = \int_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^n L_i \left[ EA_b \left( \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \left( \frac{\partial \varepsilon^i}{\partial \mathbf{q}} \right) + EI_b \left( \frac{\partial \kappa^i}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \left( \frac{\partial \kappa^i}{\partial \mathbf{q}} \right) \right] \right\} d\xi; \\ \mathbf{K}_{i\sigma} = \int_0^1 \left\{ \sum_{i=1}^n L_i \left[ \left( \frac{\partial^2 \varepsilon^i}{\partial \mathbf{q}^2} \right)^T EA_b (\varepsilon^i - \varepsilon_0^i) + \left( \frac{\partial^2 \kappa^i}{\partial \mathbf{q}^2} \right)^T EI_b (\kappa^i - \kappa_0^i) \right] \right\} d\xi. \end{cases} \quad (12)$$

### 2.3 惯性力虚功率

平面 Euler-Bernoulli 梁的惯性力虚功率是截面跟随形心平动和绕形心转动的虚功率之和。由式(6)可知,梁截面形心速度和加速度分别为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}}^i(\xi) = \mathbf{N}_r^i \dot{\mathbf{q}}; \\ \ddot{\mathbf{r}}^i(\xi) = \mathbf{N}_r^i \ddot{\mathbf{q}}. \end{cases} \quad (13)$$

梁截面的转动角速度可以表示为

$$\dot{\omega}^i(\xi) = (\mathbf{t}^i)^T \dot{\mathbf{n}}^i = (\mathbf{t}^i)^T (\partial \mathbf{n}^i / \partial \mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{N}_\omega^i \dot{\mathbf{q}}. \quad (14)$$

对式(14)再求一次时间导数可得到截面角加速度:

$$\ddot{\omega}^i(\xi) = \mathbf{N}_\omega^i \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{N}}_\omega^i \dot{\mathbf{q}}. \quad (15)$$

因此,平面 Euler-Bernoulli 梁的惯性力虚功率为

$$\delta p_i = \sum_{i=1}^n m_i \int_0^1 [(\delta \dot{\mathbf{r}}^i)^T \ddot{\mathbf{r}} + \delta \omega^i I_b \dot{\omega}] d\xi. \quad (16)$$

式中:  $m_i$  为第  $i$  段曲梁的质量;  $I_b$  为将截面绕形心主轴的惯性矩。将形心速度和加速度(式(13))、截面转动角速度(式(14))和角加速度(式(15))代入曲梁整体惯性力虚功率(式(16)),整理得

$$\delta p_i = (\delta \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_a). \quad (17)$$

其中,平面曲梁的整体质量阵  $\mathbf{M}$  和惯性力余量列阵  $\mathbf{F}_a$  分别为

$$\begin{cases} \mathbf{M} = \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n m_i [(\mathbf{N}_r^i)^T \mathbf{N}_r^i + I_b (\mathbf{N}_\omega^i)^T \mathbf{N}_\omega^i] \right) d\xi; \\ \mathbf{F}_a = \left[ \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n m_i I_b (\mathbf{N}_\omega^i)^T \dot{\mathbf{N}}_\omega^i \right) d\xi \right] \dot{\mathbf{q}}. \end{cases} \quad (18)$$

### 2.4 外力虚功率

不失一般性,假设平面曲梁上受到的外力包括作用在节点  $i$  处的集中力  $\mathbf{f}_i$ ,首末两端节点处的集中力矩为  $m_0$  和  $m_n$  以及梁弧长域内第  $i$  段的分布力  $\mathbf{p}^i(\xi)$ ,则外力的虚功率可以表示为

$$\delta p_e = \sum_{i=0}^n (\delta \dot{\mathbf{r}}_i)^T \mathbf{f}_i + \delta \omega_0 m_0 + \delta \omega_n m_n + \sum_{i=1}^n L_i \int_0^1 (\delta \dot{\mathbf{r}}^i)^T \mathbf{p}^i(\xi) d\xi. \quad (19)$$

式中:节点  $i$  的虚速度为  $\delta \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{H}_i^T \delta \dot{\mathbf{q}}$ 。

根据式(14),曲梁两端节点处的虚角速度分别为

$$\begin{cases} \delta \omega_0 = \mathbf{N}_0^\omega \delta \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{N}_0^\omega = (\mathbf{t}_0)^T (\partial \mathbf{n}_0 / \partial \mathbf{q}); \\ \delta \omega_n = \mathbf{N}_n^\omega \delta \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{N}_n^\omega = (\mathbf{t}_n)^T (\partial \mathbf{n}_n / \partial \mathbf{q}). \end{cases} \quad (20)$$

将其代入外力虚功率(式(19))可得

$$\delta p_e = (\delta \dot{\mathbf{q}})^T \mathbf{F}_e. \quad (21)$$

其中广义外力列阵为

$$\mathbf{F}_e = \sum_{i=0}^n (\mathbf{H}_i^T)^T \mathbf{f}_i + (\mathbf{N}_0^\omega)^T \mathbf{m}_0 + (\mathbf{N}_n^\omega)^T \mathbf{m}_n + \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n L_i (\mathbf{N}_r^i)^T \mathbf{p}^i(\xi) \right) d\xi. \quad (22)$$

## 2.5 整体控制方程

根据弹性体虚功率原理,弹性体内力虚功率与惯性力虚功率之和等于所受外力虚功率,即  $\delta p_s + \delta p_i = \delta p_e$ 。将平面曲梁内力虚功率(式(10))、惯性力虚功率(式(17))和外力虚功率(式(21))代入,可得平面曲梁的虚功率方程:  $(\delta \dot{\mathbf{q}})^T (\mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_s - \mathbf{F}_e) = 0$ 。再由整体参数虚变分  $\delta \dot{\mathbf{q}}$  的独立性可以得到平面曲梁的控制方程为

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_a + \mathbf{F}_s - \mathbf{F}_e = 0. \quad (23)$$

## 3 数值算例

本节将通过典型数值算例的求解来验证单元精度和计算效率。静力学算例采用 MATLAB 非线性方程求解器 fsolve 计算,动力学算例采用基于向后差分法(BDF)的刚性微分方程求解器 ode15s 仿真求解。

### 3.1 静力学验证 1(直梁)

悬臂梁在端部集中载荷作用下的几何非线性问题是验证梁单元精度的典型算例。设梁长  $L = 1 \text{ m}$ ,梁截面积  $A_b = 0.05 \times 0.05 \text{ m}^2$ ,材料弹性模量为  $E = 2.10 \times 10^{11} \text{ Pa}$ ,如图 3 所示。

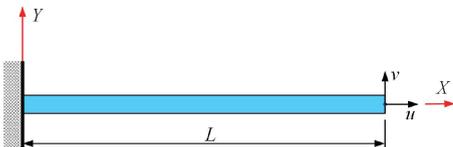


图 3 悬臂直梁

Figure 3 Cantilever beam

先研究悬臂梁在端部横向力作用的变形问题,记自由端沿  $X$  方向和  $Y$  方向的位移分量分别为  $u$  和  $v$ 。将悬臂梁等分为 10 个单元,利用分步加载方法将计算得到的自由端位移数值解与文献[17]高精度椭圆积分解进行对比,如表 1 所示。

表 1 端部集中力作用下悬臂梁的位移

Table 1 Displacements of the cantilever beam with a tip force

$FL^2/EI_b$	$u/L$		$v/L$	
	文献[17]	本文	文献[17]	本文
1.0	0.056 43	0.056 382	0.301 72	0.301 776
2.0	0.160 64	0.160 525	0.493 46	0.493 641
3.0	0.254 42	0.254 265	0.603 25	0.603 615
4.0	0.328 94	0.328 762	0.669 96	0.670 508
5.0	0.387 63	0.387 430	0.713 79	0.714 518
6.0	0.434 59	0.434 374	0.744 57	0.745 480
7.0	0.472 93	0.472 698	0.767 37	0.768 459
8.0	0.504 83	0.504 583	0.784 98	0.786 254
9.0	0.531 82	0.531 561	0.799 06	0.800 510
10.0	0.555 00	0.554 722	0.810 61	0.812 246

对比表 1 中的数值结果可知,所得数值结果与文献[17]最大误差小于 0.2%,这证明了本文单元在选取较少参数的同时也能保证计算精度。图 4 给出了悬臂梁受端部横向力作用下的位移-载荷曲线。

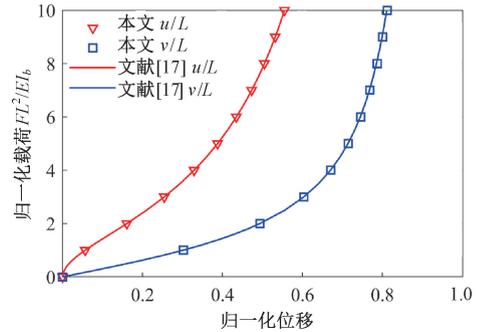


图 4 悬臂梁受端部横向力作用位移

Figure 4 Displacements of cantilever beam with a tip force

悬臂梁纯弯曲问题的位移解析解存在,当最大弯矩  $M = 2\pi EI_b/L$  时将被弯成一个圆环。依然将悬臂梁等分为 10 个单元,将本文得到的自由端节点位移数值解与解析解进行对比,如图 5 所示。

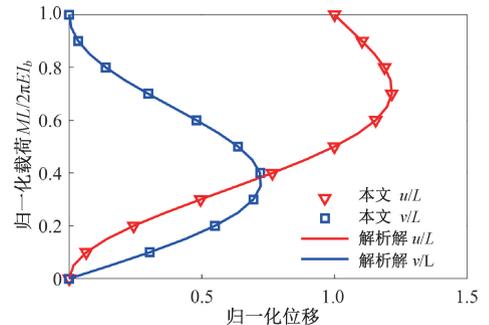


图 5 悬臂梁受端部弯矩作用的位移

Figure 5 Displacements of cantilever beam with an end torque

由悬臂梁端部位移的数值解与解析解比较可知,当直梁被弯成圆时,端部节点位移的最大误差仍

小于 0.01%。图 6 展示了在不同弯矩作用下对应的悬臂梁变形过程。

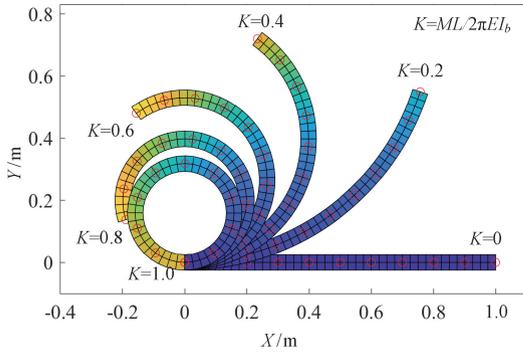


图 6 悬臂梁的纯弯曲大变形

Figure 6 Large deformations of the cantilever beam with an end torque

### 3.2 静力学验证 2(环形梁)

本算例考察了所提方法对于带有初始屈曲大变形梁的静力学精度问题,这里研究一端受固定约束另一端自由的环形梁。设环形梁半径  $R = 1 \text{ m}$ , 截面面积  $A_b = 0.1 \times 0.1 \text{ m}^2$ , 材料弹性模量  $E = 2.10 \times 10^{11} \text{ Pa}$ , 梁自由端施加沿逆时针方向的弯矩  $M$ , 如图 7 所示。

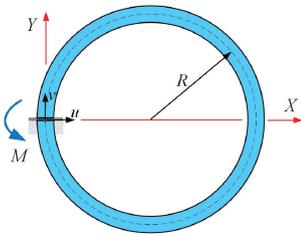


图 7 环形梁的纯弯曲

Figure 7 Circular beam with an end torque

分析可知,当弯矩  $M = 2\pi EI_b / L$  时,悬臂环形梁将变成直梁;进一步增大弯矩至  $M = 4\pi EI_b / L$  时,环形梁将被反向弯曲为一个圆。仍将环形悬臂梁等分为 10 个单元,通过迭代计算得到的自由端节点  $X$  方向位移  $u$  和  $Y$  方向位移  $v$  的数值解,如图 8 所示。

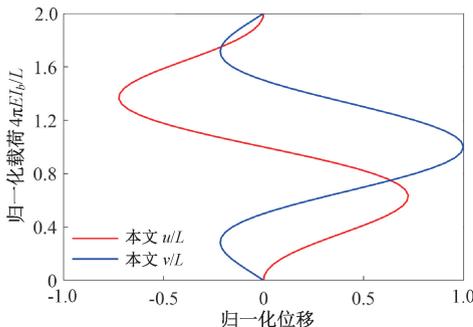


图 8 环形梁受杆端弯矩作用的位移

Figure 8 Displacements of circular beam with an end torque

由图 8 可知,当最大弯矩  $M = 4\pi EI_b / L$  时,采用

本文方法得到的自由端节点能够经过反向弯曲又回到了初始位置,此时对应的 2 个方向的位移均为 0。图 9 显示出了环形梁的变形过程。

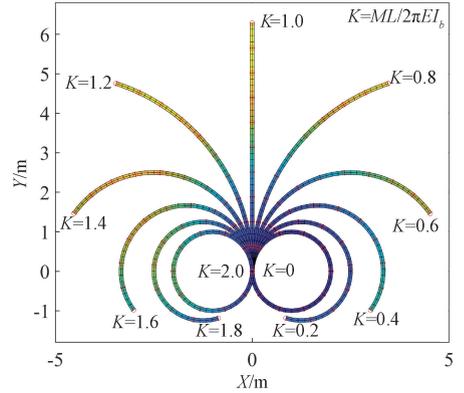


图 9 环形梁的纯弯曲变形

Figure 9 Deformations of the circular beam with an end torque

### 3.3 动力学验证(曲梁单摆)

这个算例用来考察用本文单元求解曲梁动力学问题时的计算精度和效率问题。为此研究曲梁单摆自由下落问题,设曲梁弧长  $L = \pi \text{ m}$ , 形心线半径  $R = 3 \text{ m}$ , 其对应圆心角为  $60^\circ$  的一段圆弧。曲梁截面面积  $A_b = 0.2 \times 0.2 \text{ m}^2$ , 弹性模量  $E = 6.9 \times 10^8 \text{ Pa}$ , 泊松比  $\mu = 0.27$ , 在竖直方向重力  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  作用下由图 10 所示位置自由下落。

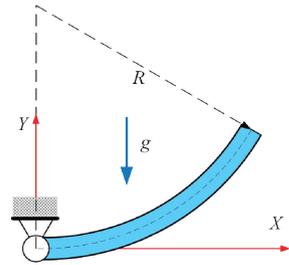


图 10 曲梁单摆

Figure 10 Curved pendulum-beam

选取平面 ANCF 梁单元<sup>[18]</sup>的仿真数值结果作对比,该单元的节点参数包含位置矢量和 2 个方向的梯度矢量共 6 个自由度。将曲梁等分为 8 个单元,设定仿真时间为 1 s,绝对误差  $\varepsilon_a = 1.0 \times 10^{-4}$ , 相对误差  $\varepsilon_r = 1.0 \times 10^{-3}$ 。将采用本文所提几何精确曲梁单元建模求解得到的单摆末端节点  $X$  方向坐标和  $Y$  方向坐标的数值解与 ANCF 梁单元对应数值解进行对比,如图 11 所示。

从图 11 可以看出,本文方法得到的数值结果与平面 ANCF 梁单元结果十分吻合,这说明对于含初始弯曲梁的刚柔耦合动力学问题,采用本文提出的几何精确曲梁单元具有良好的计算精度。

对比仿真求解时间:在相同配置电脑上进行计

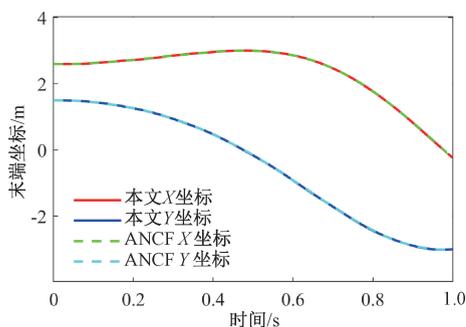


图 11 曲梁单摆模型的末端位置坐标

Figure 11 Tip position coordinates of the curved pendulum-beam

算,采用本文单元完成仿真耗时 295.3 s,而采用相同单元数目的平面 ANCF 梁单元需要 5941.8 s。在这个算例中,本文单元计算效率是 ANCF 梁单元的 20 倍以上。在同样是划分 8 个单元共计 9 个节点,在添加约束前采用本文单元建模共有 22 个参数(包含 9 个节点处的位置矢量参数和首末 2 个节点的轴向梯度矢量参数),而对应的 ANCF 梁单元模型自由度则多达 54。这也从参数数量方面初步揭示了本文单元求解效率更高的原因。

上述算例表明,本文基于三次样条插值提出的几何精确曲梁单元在保证计算精度的同时,在计算效率方面也具有明显优势。

## 4 结论

现有包含节点转动参数的几何精确梁单元通常采取对形心线运动和梁截面转动进行独立插值的策略,不仅在分析细长梁时会遇到剪切闭锁问题,且有限元网格无法与 CAD 几何模型直接转换。选取节点位置矢量和梁两端节点处的轴向位置梯度矢量为总体参数,提出了一种不含节点转动自由度的平面几何精确曲梁单元。利用三次样条插值近似梁的形心线变形,而梁截面转动则完全由形心线切向确定。通过对典型算例的求解,可以得到如下结论。

(1)相较于传统几何精确梁,本文单元节点参数不含转动自由度,单元总体自由度大幅降低;在同单元数量情况下,计算效率显著提升。

(2)梁的形心线由三次样条插值近似,单元内部节点处轴向应变的连续性也得到了满足,且可与 CAD 几何模型进行转换。构造的耦合变形场能够保证保持梁截面与形心线切向的垂直关系,因此剪切闭锁问题不会在单元应用中出现。

(3)采用的研究方法可以进一步推广到大变形空间梁单元和板壳单元的研究。

## 参考文献:

- [1] HOWELL L L. Compliant mechanisms[M]. New York: Wiley, 2001.
- [2] 张志刚,周翔,房占鹏,等. 基于绝对节点坐标方法的柔顺机构动力学建模与仿真[J]. 郑州大学学报(工学版), 2020, 41(2): 50-55.  
ZHANG Z G, ZHOU X, FANG Z P, et al. Dynamics modeling and simulation of compliant mechanisms using absolute nodal coordinate formulation[J]. Journal of Zhengzhou University (Engineering Science), 2020, 41(2): 50-55.
- [3] REISSNER E. On one-dimensional finite-strain beam theory: the plane problem[J]. Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik ZAMP, 1972, 23(5): 795-804.
- [4] SIMO J C. A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1985, 49(1): 55-70.
- [5] SIMO J C, VU-QUOC L. A three-dimensional finite-strain rod model. part II: computational aspects[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1986, 58(1): 79-116.
- [6] SHABANA A A. ANCF consistent rotation-based finite element formulation[J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2016, 11(1): 014502.
- [7] CRISFIELD M A, JELENI G. Objectivity of strain measures in the geometrically exact three-dimensional beam theory and its finite-element implementation[J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1999, 455(1983): 1125-1147.
- [8] ZUPAN E, SAJE M, ZUPAN D. The quaternion-based three-dimensional beam theory[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2009, 198(49/50/51/52): 3944-3956.
- [9] GHOSH S, ROY D. Consistent quaternion interpolation for objective finite element approximation of geometrically exact beam[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008, 198(3/4): 555-571.
- [10] SHABANA A A. Uniqueness of the geometric representation in large rotation finite element formulations[J]. Journal of Computational and Nonlinear Dynamics, 2010, 5(4): 044501.
- [11] ZHAO Z H, REN G X. A quaternion-based formulation of Euler-Bernoulli beam without singularity[J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 67(3): 1825-1835.
- [12] FAN W, ZHU W D, REN H. A new singularity-free for-

- mulation of a three-dimensional Euler-bernoulli beam using Euler parameters[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2016, 11(4): 041013.
- [13] ZHU W D, REN H, XIAO C. A nonlinear model of a slack cable with bending stiffness and moving ends with application to elevator traveling and compensation cables [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2011, 78(4): 041017.
- [14] FAN W. An efficient recursive rotational-coordinate-based formulation of a planar Euler-Bernoulli beam[J]. *Multi-body System Dynamics*, 2021, 52(2): 211-227.
- [15] SHABANA A A. An absolute nodal coordinate formulation for the large rotation and deformation analysis of flexible bodies: technical report[R]. Chicago: Department of Mechanical Engineering, University of Illinois, 1996.
- [16] 兰朋, 於祖庆, 赵欣. Bézier 和 B-spline 曲线的绝对结点坐标列式有限元离散方法[J]. *机械工程学报*, 2012, 48(17): 128-134.
- LAN P, YU Z Q, ZHAO X. Using absolute nodal coordinate formulation elements to model Bézier and B-spline curve for finite element analysis[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2012, 48(17): 128-134.
- [17] MATTIASSON K. Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1981, 17(1): 145-153.
- [18] OMAR M A, SHABANA A A. A two-dimensional shear deformable beam for large rotation and deformation problems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 243(3): 565-576.

## A Geometrically Exact Curved Beam Element Based on Cubic Spline Interpolation

ZHANG Zhigang, MA Xinxuan, WANG Caidong, ZHENG Huadong, WANG Liangwen

(Henan Key Laboratory of Intelligent Manufacturing of Mechanical Equipment, Zhengzhou University of Light Industry, Zhengzhou 450002, China)

**Abstract:** To accurately model and simulate the multibody system including large deformation beams, a 2D large deformation curved beam element, which had few element parameters and can be integrated with the CAD geometric model, was proposed based on cubic spline interpolation. Firstly, by taking the position vector at each node and the axial position gradient vector at the two-end nodes as the global parameters, the motion of the beam centroid line was approximated using the cubic spline interpolation. Secondly, on the basis of fully considering the deformation of the slender beam, the rotation of the beam cross-section was determined by the centroid tangent according to the deformation assumption of Euler-Bernoulli beam. Finally, the axial strain and curvature of the beam were derived based on the geometrically exact beam theory, the mass matrix, nodal force and generalized external force of the planar curved beam element were derived based on the virtual power principle, and the tangent stiffness matrix was obtained. Compared with the existing large deformation planar beam element, the number of the global parameters of the proposed beam element was greatly reduced. In addition, because the vertical relationship between the beam cross-section and the tangent direction of the centroid line was guaranteed in the proposed coupling deformation field, the shear locking phenomenon in the application could be avoided. In the numerical example, through the calculation and comparison of typical examples including the static geometric nonlinear problems and dynamic rigid flexible coupling problems, it was shown that the calculation efficiency of the proposed geometrically exact curved beam element could be greatly improved while not losing the calculation accuracy.

**Keywords:** geometrically exact beam; cubic spline; curved beam; geometric nonlinearity; rigid-flexible coupling