

文章编号:1671-6833(2020)06-0060-06

热局部非平衡流体多孔弹性半平面问题的非线性研究

朱媛媛,王笑梅

(上海师范大学 信息与机电工程学院,上海 200234)

摘 要:在几何非线性和热局部非平衡条件下,对不可压流体饱和多孔热弹性半平面在表面温度载荷作用下的热动力学特性进行研究。首先基于多孔介质混合物理论给出了问题的动力学数学模型。然后提出了一种综合的数值计算方法来求解问题,该方法通过微分求积法和二阶后向差分格式在空间域和时间域离散数学模型,利用 Newton-Raphson 法求解非线性代数方程组,从而可得到问题的数值结果。研究表明,求解方法是有效可靠的,且具有计算量小、精度高等优点。最后,研究了流体饱和多孔热弹性半平面在表面温度载荷下的热力学特性,考察了材料参数和几何非线性对半平面动力学行为的影响。

关键词:多孔介质混合物理论(PMT);流体饱和多孔热弹性半平面;几何非线性;热局部非平衡;微分求积法(DQM);热动力学特性

中图分类号: TU311 文献标志码: A doi:10.13705/j.issn.1671-6833.2020.04.012

0 引言

饱和多孔介质热-流-固耦合问题不仅在传统的土力学、水文学等经典领域得到广泛应用,而且也广泛应用于核废料污染物处置、地热资源、热能贮存、人体关节软骨组织分析等工程领域。因此,研究饱和多孔介质的热力学性能的理论、数值方法及其应用有着重要的意义和广泛的背景。早在 1955 年, Biot^[1] 建立了有关饱和多孔介质的热弹性理论,已在众多工程领域成功地取得了许多研究成果^[2-4]。在连续介质混和物公理体系和体积分数概念的基础上, De Boer^[5] 于 2005 年建立了更加精确完整的多孔介质热弹性理论,一些微观性质可以直接用来描述宏观性质,容易反映非线性效应。利用混合物理论, De Boer 等^[6] 为一维流体饱和和不可压缩多孔介质的动力学固结问题提供了解析解。 Heider 等^[7] 研究了波在饱和多孔半空间中的传播。在 De Boer 等^[8] 提出的多孔介质热力学本构关系的基础上, He 等^[9] 给出了一种在热局部非平衡条件下的流体多孔介质的数学模型, Yang^[10] 建立了该模型的相应的 Gurtin 型变分原理,朱媛媛等^[11] 对空间轴对称流体饱和多孔热弹性柱体动力学特性进行了分析。但目前有关饱

和多孔介质热-流-固耦合系统非线性理论和应用以及数值模拟的报道很少见。

为探索所提问题理论和数值方法分析及其可行性,笔者基于多孔介质混合理论(porous media theory, PMT)^[5,8],研究了在有限变形和热局部非平衡条件下,不可压流体饱和多孔热弹性半平面在表面温度载荷作用下的动力学特性。在建立该问题非线性数学模型的基础上,通过采用微分求积法(differential quadrature method, DQM)在空间域内建立离散问题的非线性数学模型,用二阶后向差分格式来处理时间导数,用 Newton-Raphson 法求解非线性代数方程组,从而可得到问题的数值结果,分析半平面的动力学特性。通过和 De Boer 等^[6] 的解析解的对比研究,表明本文方法是有效可靠的,具有计算量小、精度高等优点。

1 数学模型

考察图 1 所示平面直角坐标系 xoz 中饱和和不可压多孔热弹性半平面的动力学问题。假设作用于半平面表面的载荷或者温度具有某种对称性,取 oz 轴为对称轴,由表面指向半平面内部的方向为正方向(图 1)。

设平面处于热局部非平衡状态(固相介质和

收稿日期:2020-03-21;修订日期:2020-06-10

基金项目:上海市自然科学基金资助项目(17ZR1419800)

作者简介:朱媛媛(1971—),女,上海人,上海师范大学副教授,博士,主要从事多场耦合分析、稳定性理论及分析等方面的研究,E-mail:zhuyuan@shnu.edu.cn。

$$\left\{\begin{array}{l}u_x=0;\\u_z=0;\\\dot{u}_x=0;\\\dot{u}_z=0;\\w_x=0;\\w_z=0;\\\theta^S=0;\\\theta^F=0.\end{array}\right.\quad (9)$$

因此,式(1)~(8)构成了在热局部非平衡条件下流体饱和多孔热弹性半平面动力学问题的一个数学模型。当固相和液相介质的变温相同时,式(1)~(8)退化为热局部平衡条件下的数学模型。

不难看到,很难获得上述动力学问题的解析或半解析解。在本文中,对于热局部非平衡条件下的非线性数学模型在空间域中使用 DQM 离散,时间导数采用二阶后向差分格式处理,离散后的非线性代数方程组采用 Newton-Raphson 法迭代求解,可得到问题的数值模拟结果。

2 求解方法

1970 年, Bellman 等^[12-13]提出了 DQM。DQM 具有公式简单、精度高、计算量少等优点,已有很多成功的应用^[14-15]。DQM 的基本思想是将函数的偏导数近似为离散点处相应函数值的加权和。由于 DQM 权函数的选取与特定问题无关,微分方程能 DQ 离散为相应的代数方程求解。

设半平面占有区域 $\Omega = \{ \langle x, z \rangle \mid 0 \leq x \leq L_0, 0 \leq z \leq H_0 \}$, 分别在 x, z 轴方向布置 $N_x \times N_z$ 个节点, 节点坐标为 Chebyshev-Lobatto 多项式的零点。根据 DQM, 未知函数 $\psi(x, z)$ 对 x 的 n 阶偏导数可近似表示为:

$$\left. \frac{\partial^n \psi}{\partial x^n} \right|_{x=x_k, z=z_\eta, k=1}^{N_x} = \sum_{x=x_k, z=z_\eta, k=1}^{N_x} A_{\xi k}^{(n)} \psi_{k\eta}, \xi = 1, 2, 3, \dots, N_x. \quad (10)$$

式中: $\psi_{k\eta}$ 是在 $x = x_k, z = z_\eta$ 节点处的函数值; $A_{\xi k}^{(n)}$ 是 n 阶偏导数的权系数, 本文由 Lagrange 插值

多项式来决定。同时, 可给出 $\psi(x, z)$ 对 z 的 m 阶偏导数, 权系数为 $B_{nl}^{(m)}$ 。

利用式(10), 在空间域内对数学模型(1)~(8)DQM 离散化后, 产生了关于时间 t 的微分代数方程组。使用二阶后向差分格式来处理关于微分代数方程组中的时间导数:

$$\dot{\psi}(t_n, x) \Delta t = \frac{3}{2} \psi(t_n, x) - 2 \psi(t_{n-1}, x) + \frac{1}{2} \psi(t_{n-2}, x).$$

(11)

式中: Δt 是时间步长; $\psi(t_n, x)$ 是在时刻 $t = t_n$ 的函数值。

最后利用 DQ 离散的初始条件(9), 对离散化方程组进行 Newton-Raphson 迭代求解, 从而可得到问题的数值结果。

3 分析与讨论

3.1 验证方法

忽略体积力的影响, De Boer 等^[6]分析了几何小变形和常温条件下不可压饱和多孔弹性介质的一维动力固结问题, 并给出了在 PMT 下唯一的解析解。为了验证本文方法的正确性和有效性, 本文在第 1 节给定的数学模型中设平面表面变温为 $\varphi(x, t) = 0$, 从而可以认为在热局部非平衡条件下的解近似等于常温状态时的解, 然后用一个高 $H_0 = 10 \text{ m}$, 宽 $L_0 = 10 \text{ m}$ 的流体饱和多孔弹性体来模拟 De Boer 等^[6]所考虑的类似问题, 并与解析解进行比较。在验证中, 分别考虑了阶梯载荷 $q(x, t) = q_0 h(t)$ 和周期载荷 $q(x, t) = q_0 [1 - \cos(\omega t)]$ 的影响, 其中, $q_0 = 3 \text{ kN/m}^2, \omega = 0.4 \text{ s}^{-1}, h(t)$ 为 Heaviside 函数。本文计算中选取的材料是废料存储中使用的黏土材料^[2], 材料参数见表 1。

图 2 和图 3 分别给出了在阶梯载荷和周期载荷下, 对称轴处不同深度的位移 u_z (沉降), 其中, 实线和虚线分别对应了在 7×7 和 9×9 布点下利用本文方法得到的数值解, 坐标点为文献[6]

表 1 材料参数
Table 1 Parameters of material

参数	取值	参数	取值	参数	取值
n^S	0.6	β^S	12 Pa/℃	μ^S	$0.231 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$
n^F	0.4	β^F	1.35 Pa/℃	λ^S	$0.346 \times 10^6 \text{ kN/m}^2$
ρ^{SR}	$2\,610 \text{ kg/m}^3$	k^{SS}	$2.489 \times 10^6 \text{ W/(m}^\circ\text{C)}$	α^S	$8.9 \times 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}$
ρ^{FR}	$1\,000 \text{ kg/m}^3$	k^{FF}	$0.622 \times 10^6 \text{ W/(m}^\circ\text{C)}$	c^S	$937 \text{ J/(kg}^\circ\text{C)}$
γ^{FR}	$10\,000 \text{ N/m}^3$	$k^{\text{SF}}, k^{\text{FS}}$	$0.016 \times 10^6 \text{ W/(m}^\circ\text{C)}$	c^F	$4\,186 \text{ J/(kg}^\circ\text{C)}$
κ^F	$0.017\,3 \text{ m/s}$	e_θ	0 W/m^3	Θ_0	$10 \text{ }^\circ\text{C}$

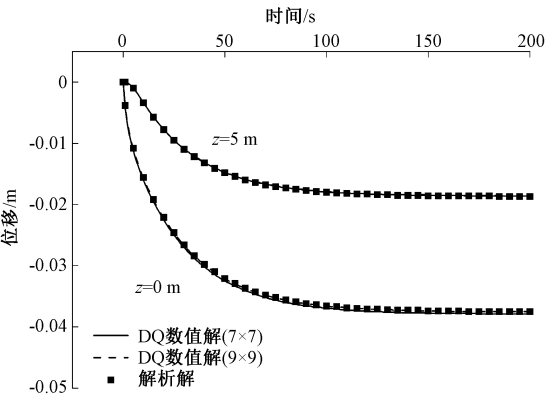


图 2 位移时程曲线图 (阶梯载荷)
Figure 2 Time-history curves of displacement (step loading)

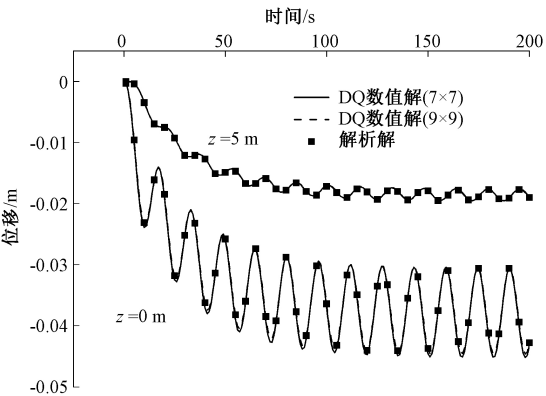
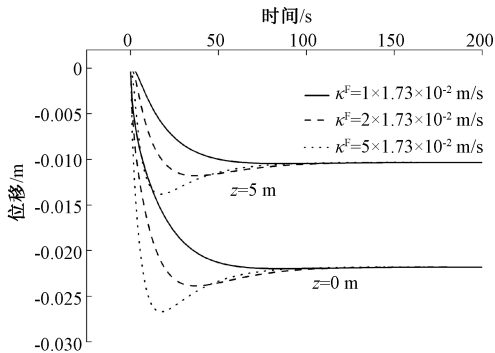
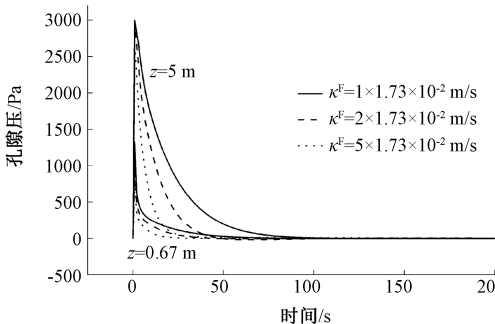


图 3 位移时程曲线图 (周期载荷)
Figure 3 Time-history curves of displacement (cycle loading)



(a) 沉降



(c) 孔隙压

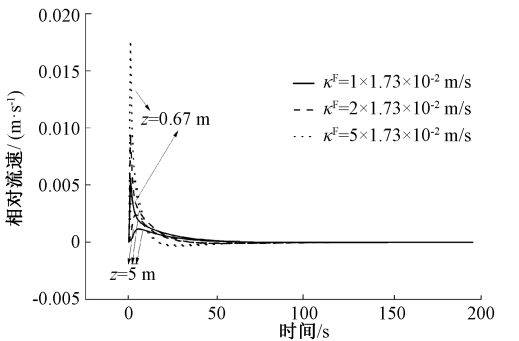
中的解析解。时间步长 $\Delta t = 1\text{ s}$ 。从图中看到,本文提供的数值结果与解析结果吻合良好,当布置结点数 为 7×7 个时,便能得到令人满意的结果。说明用本文方法来计算流体饱和和多孔弹性介质的动力学特性是有效的。

3.2 耦合系统的动力学特性分析

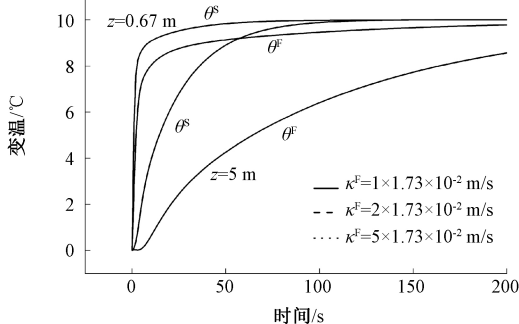
在热局部非平衡条件下,考察高(深) $H_0 = 10\text{ m}$,宽 $L_0 = 10\text{ m}$ 的半平面域,边界条件由式(5) 给定。考察表面阶梯温度载荷 $\varphi(x,t) = \varphi_0 h(t)$ 的影响,其中 $\varphi_0 = 10\text{ }^\circ\text{C}$, $h(t)$ 是 Heaviside 函数。计算中布点数为 7×7 ,时间步长 $\Delta t = 1\text{ s}$,表面垂直外载 $q(x,t) = 3\text{ kN/m}^2$,材料参数见表 1。

3.2.1 达西渗透系数 κ^F 的影响

图 4 显示了在热局部非平衡条件下,达西渗透系数 κ^F 对半平面对称轴 ($x = 0$) 处未知量 u_z 、 w_z 、 p 及 θ^S 和 θ^F 的影响。图 4(a) 表明随着时间的逐渐增加,沉降 u_z 最终达到相同的稳定状态。 κ^F 较大时,初始阶段固结速度比热传导快,导致热体积膨胀不明显,所以半平面的沉降 u_z 大。图 4(b) 表明相对流速 w_z 的变化趋势。当系统趋于稳定时,相对流速 w_z 趋于零。但在初始阶段,平面内部的流速小于上表面附近,并且 κ^F 较大时流速的峰值较大。图 4(c) 表明孔隙压 p 随着时间由初始孔压逐渐至零,半平面上表面附近孔隙压的面内部快,同时孔隙压的消散速度随 κ^F 增大而



(b) 相对流速



(d) 变温

图 4 达西渗透系数对半平面时-程曲线的影响

Figure 4 Effect of Darcy permeability coefficient on time-history curves of half-plane

增大。消散速度较平图 4(d) 表明固相和液相的温度从上表面传播到半平面深处,并且逐渐到达至给定的表面温度,最终达到等温状态。由于在热局部非平衡条件下,流固两相之间的温度是不同的,在给定的参数下,固相温度高于流相温度,并且在初始阶段温差明显。同时, κ^F 对变温 θ^S 和 θ^F 的影响很小。

3.2.2 热能交换系数 e_θ 的影响

图 5 给出了在热局部非平衡条件下,不同物相之间热能交换系数 e_θ 对半平面对称轴 ($x = 0$) 处未知量 u_z 及 θ^S 和 θ^F 的影响。同时,图 5 也给出了在热局部平衡条件下系统的时程曲线。在热局部非平衡条件下,随着 e_θ 增大,固相温度降低并逐渐接近热局部平衡条件下系统的温度,而流相温度升高并逐渐接近热局部平衡条件下系统的温度,因此流固两相温差逐渐变小。另外,随着 e_θ

增大,固相温度降低,在初始阶段系统热传导过程小于固结作用,沉降变大。

与此同时,笔者也考虑了热交换系数 β^S 、 β^F 和热传导系数 k^{SS} 、 k^{FF} 、 k^{SF} 对半平面的影响。限于篇幅,仅列出结论如下:当热交换系数 β^S 、 β^F 较小时,流相和固相之间的耦合作用减弱,初始阶段半平面的沉降 u_z 较大。当热传导系数 k^{SS} 、 k^{FF} 、 k^{SF} 较大时,初始阶段时热传导比固结过程快,半平面的沉降 u_z 较小,温度场达到等温状态所需的时间更短。

3.2.3 非线性的影响

图 6 给出了在热局部非平衡条件下,对称轴不同深度处沉降 u_z 的几何非线性结果与相应的线性解的比较。可以看到,当载荷较小时 ($q(x, t) = 3 \text{ kN/m}^2$),非线性解和线性解趋于一致。当载荷较大时 ($q(x, t) = 30 \text{ kN/m}^2$),非线性解略大于线性解。

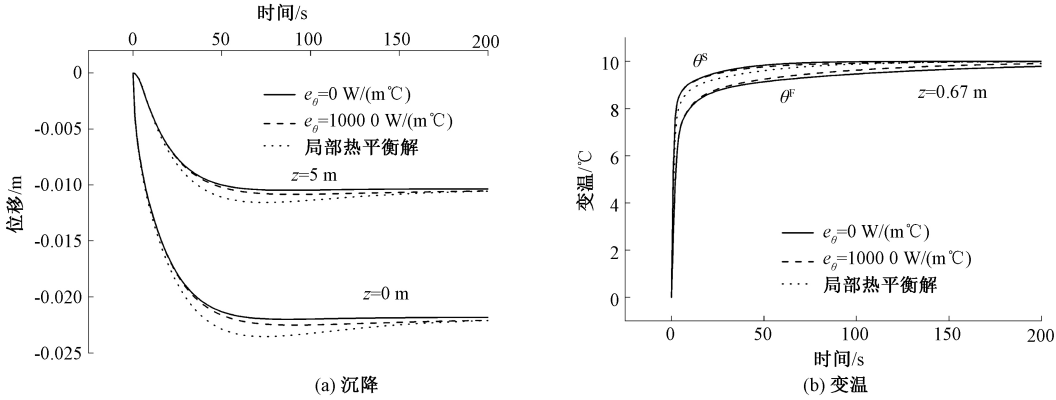


图 5 热能交换系数对半平面时-程曲线的影响

Figure 5 Effect of energy exchange coefficient on time-history curves of half-plane

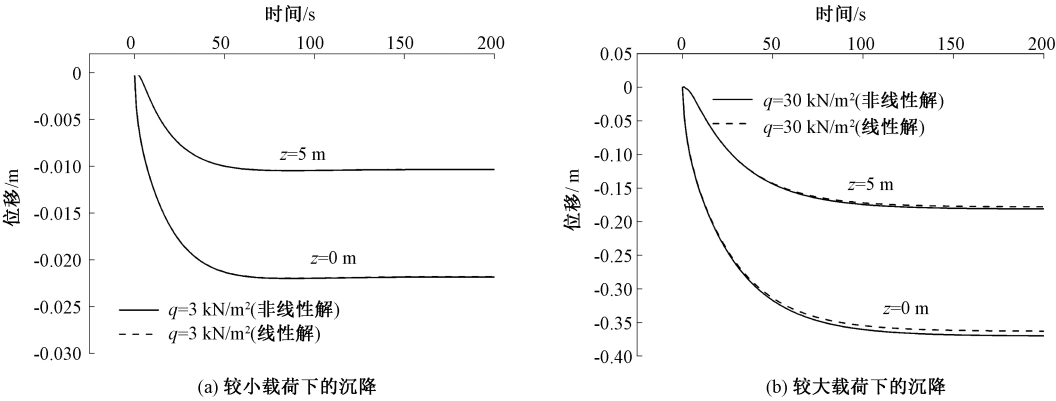


图 6 非线性解与线性解的对比

Figure 6 Comparison between nonlinear solutions and linear solutions

4 结论

在几何非线性条件和热局部非平衡条件下,对流体饱和和不可压多孔热弹性半平面在表面温度载荷作用下的动力学特性进行研究。首先基于

PMT 并考虑几何非线性和热局部非平衡的影响,给出了问题的数学模型;其次提出了一个系统的综合数值计算方法来模拟问题的数值结果,通过 DQM 和二阶后向差分格式分别在空间域和时间域离散数学模型,利用 Newton-Raphson 法求解非

线性代数方程组,从而可得到问题的数值结果,分析半平面的动力学特性。

和现有解析解的对比研究验证了本文方法是正确可靠的,具有精度高、计算量小、数值稳定等优点。在此基础上,研究了在表面温度载荷作用下半平面的热力学特性,考察了系统的材料参数以及几何非线性对半平面动力学特性的影响,获得了一些有益的结论。

参考文献:

[1] BIOT M A.Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid[J].Journal of applied physics, 1955,26(2):182-185.

[2] ZHOU Y,RAJAPAKSE R K N D,GRAHAM J.A coupled thermoporoelastic model with thermo-osmosis and thermal-filtration[J].International journal of solids and structures, 1998,35(34/35):4659-4683.

[3] 白冰.循环温度荷载作用下饱和和多孔介质热-水-力耦合响应[J].工程力学,2007,24(5):87-92.

[4] 毕苏萍,时刚,高广运.饱和地基上铁路交通引起的地面振动分析[J].郑州大学学报(工学版),2010,31(3):73-76.

[5] De BOER R.Theoretical poroelasticity: a new approach [J].Chaos,solitons & fractals, 2005,25(4):861-878.

[6] De BOER R,EHLERS W,LIU Z F.One-dimensional transient wave propagation in fluid-saturated incompressible porous media[J].Archive of applied mechanics, 1993,63(1):59-72.

[7] HEIDER Y,MARKERT B,EHLERS W.Dynamic wave propagation in infinite saturated porous media half spaces[J].Computational mechanics, 2012,49(3):319-336.

[8] DE BOER R,KOWALSKI S J.Thermodynamics of fluid-saturated porous media with a phase change[J].Acta mechanica, 1995,109(1/2/3/4):167-189.

[9] HE L W,JIN Z H.A local thermal nonequilibrium poroelastic theory for fluid saturated porous media[J].Journal of thermal stresses, 2010,33(8):799-813.

[10] YANG X. Gurtin-type variational principles for dynamics of a non-local thermal equilibrium saturated porous medium [J]. Acta mechanica solida sinica, 2005, 18(1): 37-45.

[11] 朱媛媛,胡育佳,程昌钧,等.基于 DQM 的空间轴对称流体饱和和多孔热弹性柱体动力学特性研究[J].振动与冲击,2017,36(23):83-91.

[12] BELLMAN R, CASTI J. Differential quadrature and long-term integration[J].Journal of mathematical analysis and applications, 1971,34(2):235-238.

[13] BELLMAN R,KASHEF B,CASTI J.Differential quadrature;a technique for the rapid solution of nonlinear partial differential equations [J]. Journal of computational physics, 1972,10(1):40-52.

[14] 程昌钧,朱正佑.微分求积方法及其在力学应用中的若干新进展[J].上海大学学报(自然科学版),2009,15(6):551-559.

[15] 聂国隽,仲政.用微分求积法求解梁的弹塑性问题[J].工程力学,2005,22(1):59-62,27.

Nonlinear Study on Fluid Porous Elastic Half-plane Based on Local Thermal Non-equilibrium

ZHU Yuanyuan, WANG Xiaomei

(The College of Information, Mechanical and Electrical Engineering, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, China)

Abstract: In the case of geometric nonlinearity and local thermal non-equilibrium, thermodynamic characteristics for an incompressible fluid-saturated porous thermo-elastic half-plane subjected to a surface temperature loading were studied. Firstly, the mathematical model of problem was established based on the Porous Media Theory. Then a synthetical numerical computation method was presented to simulate the numerical results of problem, in which, the differential quadrature method and the second-order backward difference scheme were applied to discretize mathematical model on the spatial and time domain, respectively. The Newton-Raphson iterative method was finally used to solve the nonlinear algebraic equations and to present the numerical results of the problem. The study pointed out that the solution method was effective and reliable. The advantages of the presented method, such as little calculated amount and high accuracy, could be proved. Finally, the thermodynamics characteristics for a fluid-saturated porous thermo-elastic half-plane subjected to the surface temperature loadings were studied, the effects of material parameters and geometric nonlinearity on the dynamic characteristics were considered in detail.

Key words: porous media theory(PMT); fluid-saturated porous thermo-elastic half-plane; geometric nonlinearity; local thermal non-equilibrium; differential quadrature method (DQM); thermodynamic characteristics