

基于地基系数法的横向受荷桩通解研究

贺拴海, 贺小卫

(长安大学 公路学院, 陕西 西安 710064)

摘要: 为完善和改进基于地基系数法的桩身内力计算通解, 以文克尔假定和幂级数法为理论基础, 推导了考虑桩身计算宽度非线性的通解以及通过简化得到计算宽度线性的通解, 并给出相应的通解表达式, 从而将目前基于地基系数法的桩身内力计算理论进行发展和统一. 通过对其初值条件进行研究总结, 得出目前常用的 4 种桩顶边界和 5 种桩端边界条件, 进而给出其相应的计算表达式, 从而解决了横向受荷桩的计算问题.

关键词: 地基系数法; 横向受荷桩; 通解; 地基比例系数; 边界条件

中图分类号: TU753 文献标志码: A doi:10.13705/j.issn.1671-6833.2016.03.015

0 引言

竖桩由于自身在施工和受力方面的突出优势, 作为结构物的桩基础已是大势所趋, 故从上世纪五十年代开始, 学术界开展了大量的研究, 尤其是在地基系数法方面. 地基系数法采用捷克学者文克尔(E. Winkler)于 1867 年提出的弹性地基梁为理论依据. 该假定认为地基为服从虎克定律的弹性体, 且地基反力 R_y 与桩侧上的任意一点的横向位移 x 成正比. 地基反力的一般表达式为 $R_y = k(y)x_y$; 地基系数 $k(y) = m(y_0 + y)^n$, 而对于地基系数的表达式的选取不同, 又产生了很多方法, 比如我们所熟知的张有龄法、 m 法和 C 法等一系列计算方法. 常保平^[1]对多年冻土地区的桩进行分析, 得出了地基系数为 $k(y) = m y^2$ 时更加合理; 黄杰等^[2]提出考虑计算宽度非线性模型及其解; 为了给出比较统一的表达式, 范文田^[3]用幂级数法推导出侧向梯形荷载受力桩的通解, 其后张耀年^[4-5]根据这个通解进行了初值问题分析, 并得出进一步的通解; 王伯惠等^[6-9]用麦克-劳林级数法推导出受横向荷载桩的通解并对该通解进行了详细的分析研究. 然而, 目前还没有通解公式考虑计算宽度非线性、承受水平荷载及地面(局部冲刷线)地基比例系数不为零的因素, 故笔者考虑上述因素进而推导出更加完备的通解, 并对该通解简化进而得出更加简单实用的通解表达

式, 除此之外, 也对初值条件进行了总结.

1 横向受荷桩的通解

如图 1 所示, 桩顶与地面或局部冲刷线平齐. 对各个量的符号规定为: 横向位移 x , 顺 x 轴正方向为正值; 转角 φ , 逆时针方向为正值; 弯矩 M_y 当左侧纤维受拉时为正值; 横向力 Q_y 顺 x 轴正方向为正值, 下文推导过程中将会省略小脚标.

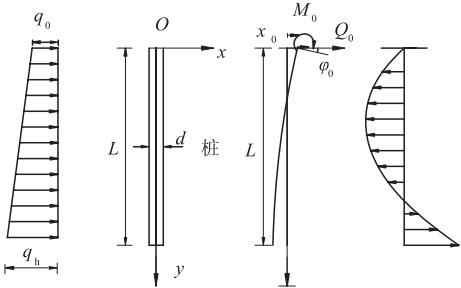


图 1 横向受荷桩的计算简图

Fig. 1 Laterally loaded piles calculation diagram

故如图 2 所示, 图(a)即为现阶段普遍使用的计算宽度形式, 即假定计算宽度随桩身为常数; 图(b)是由黄杰等^[10-11]提出的非线性分布假定形式, 即假定计算宽度随桩身为抛物线变化, 该种形式考虑了计算宽度随桩身的变化, 实质上是考虑了桩土共同作用的影响随桩身变化, 更加科学合理, 笔者将会以上述两种形式分别导出桩身内力计算通解.

收稿日期: 2015-09-29; 修订日期: 2015-12-16

基金项目: 国家科技支撑计划项目(2014BAG05B00)

作者简介: 贺拴海(1962—), 男, 陕西洛川人, 长安大学教授, 博士生导师, 主要从事桥梁结构方面的研究, E-mail: 1943811337@qq.com.

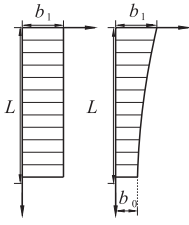


图2 计算宽度沿桩身分布图

Fig. 2 Calculate the width of the pile body

1.1 考虑计算宽度非线性的通解

根据材料力学原理,弹性柱的弹性挠曲线微分方程为:

$$EI \frac{d^4 x}{dy^4} + P_y \frac{d^2 x}{dy^2} + mb_1 (y_0 + y)^n x = q_0 B + n_0 B y. \quad (1)$$

式中: EI 为桩身抗弯刚度; m 为地基系数的比例系数; b_1 为桩的计算宽度; y_0 为初始横向位移系数,即桩顶与粘结力有关的系数(考虑到地基土壤千变万化,一些土或岩石在地表处也具有一定的抗力,故加入该项); q_0 为桩顶均布力集度; q_h 为桩端均布力集度; n_0 为外荷载沿桩身的斜率, $n_0 = (q_h - q_0)/L$; L 为桩身入土深度; B 为桩身实际宽度。

式中, P_y 为柱的轴向荷载。由于 P_y 的作用影响很小,且该项使得上列微分方程求解复杂化,因此,通常可将 $P_y (d^2 x/dy^2)$ 项略去不考虑,即得如下公式:

$$EI \frac{d^4 x}{dy^4} + mb_1 (y_0 + y)^n x = q_0 B + n_0 B y. \quad (2)$$

黄杰等^[10-11]提出:

$$x_{b_1} = (b_0 - b_1)/L^2 y^2 + b_1. \quad (3)$$

为使得该式更具有普遍性,本文假设

$$x_{b_1} = ay^2 + by + c. \quad (4)$$

式中: a 、 b 、 c 可根据实际情况选用,式(3)即为该式(4)的一个特例。将式(4)代入式(2)可得如下公式:

$$EI \frac{d^4 x}{dy^4} + m(ay^2 + by + c)(y_0 + y)^n x = q_0 B + n_0 B y. \quad (5)$$

令 $y' = y_0 + y$, 因为 $dy' = d(y_0 + y) = dy$, 故 $dy'^4 = dy^4$, 则得如下公式:

$$EI \frac{d^4 x}{dy'^4} + m(ay'^2 - (2ay_0 - b)by' + (ay_0^2 - by_0 + c))y'^n x = (q_0 B - n_0 B y_0) + n_0 B y'. \quad (6)$$

将系数表示如下:

$$\begin{cases} \alpha_1 = ma/(EI); \\ \alpha_2 = -m(2ay_0 - b)/(EI); \\ \alpha_3 = m(ay_0^2 - by_0 + c)/(EI); \\ \beta_1 = (q_0 B - n_0 B y_0)/(EI); \\ \beta_2 = n_0 B/(EI). \end{cases} \quad (7)$$

将式(7)代入式(6)可得如下公式:

$$\frac{d^4 x}{dy'^4} = -(\alpha_1 y'^{n+2} + \alpha_2 y'^{n+1} + \alpha_3 y'^n) x + \beta_1 + \beta_2 y'. \quad (8)$$

利用高等数学的幂级数展开方法求解上述四阶微分方程。设

$$x_{(y)} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i y'^i = a_0 y'^0 + \cdots + a_k y'^k + \cdots \quad (9)$$

对上式连续求4次导数,得

$$\frac{d^4 x}{dy'^4} = \sum_{i=4}^{\infty} i(i-1)(i-2)(i-3) a_i y'^{i-4}. \quad (10)$$

式(8)右式 = 式(10)右式,得

$$\begin{aligned} \sum_{i=4}^{\infty} i(i-1)(i-2)(i-3) a_i y'^{i-4} &= \beta_1 + \beta_2 y' - \\ \alpha_1 \sum_{i=0}^n (a_i y'^{i+n+2}) - \alpha_2 \sum_{i=0}^n (a_i y'^{i+n+1}) - \alpha_3 \sum_{i=0}^n (a_i y'^{i+n}). \end{aligned} \quad (11)$$

令左端 $l = i - 4$, 则得

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} (i+1)(i+2)(i+3)(i+4) a_{i+4} y'^i &\equiv \beta_1 + \beta_2 y' - \\ \alpha_1 \sum_{i=0}^n (a_i y'^{i+n+2}) - \alpha_2 \sum_{i=0}^n (a_i y'^{i+n+1}) - \alpha_3 \sum_{i=0}^n (a_i y'^{i+n}). \end{aligned} \quad (12)$$

式中: n 取整数,又由于式(12)为一恒等式,故同次幂的系数是相等的,故可得

$$\begin{aligned} i=0 \text{ 时}, 4!a_4 &= \beta_1; i=1 \text{ 时}, 5!a_5 = \beta_2; i \in (1, n) \\ \text{时}, a_{i+4} &= 0; i=n \text{ 时}, a_{n+4} (n+4)!/n! = -\alpha_3 a_0; \\ i=n+1 \text{ 时}, a_{n+5} (n+5)!/(n+1)! &= -\alpha_2 a_0 - \\ \alpha_3 a_1; i \geq n+2 \text{ 时}, a_{i+4} (n+4)!/n! &= -\alpha_1 a_{i-n-2} - \\ \alpha_2 a_{i-n-1} - \alpha_3 a_{i-n}. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_{(y'=0)} = x_0; \\ dx/dy'_{(y'=0)} = \varphi_0; \\ d^2 x/dy'^2_{(y'=0)} = M_0/(EI); \\ d^3 x/dy'^3_{(y'=0)} = Q_0/(EI); \end{cases} \quad (13)$$

由式(13)得:

$$\begin{cases} a_0 = x_0/0!; \\ a_1 = \varphi_0/1!; \\ a_2 = M_0/(2!EI); \\ a_3 = Q_0/(3!EI); \\ a_4 = \beta_1/4!; \\ a_5 = \beta_2/5!. \end{cases} \quad (14)$$

由于

$$\begin{cases} x_{(y')} = x; \\ dx/dy'_{(y')} = \varphi; \\ d^2 x/dy'^2_{(y')} = M/(EI); \\ d^3 x/dy'^3_{(y')} = Q/(EI); \end{cases} \quad (15)$$

由式(14)~(15)可得:

$$\begin{cases}
 \psi_{00} = \frac{1}{0!} y'^0 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-\alpha_3)^k \cdot \left(\prod_{k=1}^k \frac{[k(n+4)+0-4]!}{k(n+4)!} \right) y'^{k(n+4)} \right]; \\
 \psi_{01} = \frac{1}{1!} y'^1 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-\alpha_3)^k \cdot \left(\prod_{k=1}^k \frac{[k(n+4)+1-4]!}{[k(n+4)+1]!} \right) y'^{k(n+4)} \right]; \\
 \psi_{02} = \frac{1}{2!} y'^2 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-\alpha_3)^k \cdot \left(\prod_{k=1}^k \frac{[k(n+4)+2-4]!}{[k(n+4)+2]!} \right) y'^{k(n+4)} \right]; \\
 \psi_{03} = \frac{1}{3!} y'^3 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-\alpha_3)^k \cdot \left(\prod_{k=1}^k \frac{[k(n+4)+3-4]!}{[k(n+4)+3]!} \right) y'^{k(n+4)} \right]; \\
 \psi_{04} = \frac{1}{4!} y'^4 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-\alpha_3)^k \cdot \left(\prod_{k=1}^k \frac{[k(n+4)+4-4]!}{[k(n+4)+4]!} \right) y'^{k(n+4)} \right]; \\
 \psi_{05} = \frac{1}{5!} y'^5 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-\alpha_3)^k \cdot \left(\prod_{k=1}^k \frac{[k(n+4)+5-4]!}{[k(n+4)+5]!} \right) y'^{k(n+4)} \right]; \quad (29)
 \end{cases}$$

由式(29)可得:

$$\begin{cases}
 \psi_{0i} = \frac{1}{(i-0)!} y'^{i-0} + \frac{1}{i!} \sum_{k=1}^{\infty} (-\alpha_3)^k \cdot \left(\frac{k(n+4)!}{k(n+4)!} \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^k \frac{[k(n+4)+i-4]!}{[k(n+4)+i]!} \right) y'^{k(n+4)+i-0}; \\
 \psi_{1i} = \frac{1}{(i-1)!} y'^{i-1} + \frac{1}{i!} \sum_{k=1}^{\infty} (-\alpha_3)^k \cdot \left(\frac{k(n+4)!}{[k(n+4)-1]!} \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^k \frac{[k(n+4)+i-4]!}{[k(n+4)+i]!} \right) y'^{k(n+4)+i-1}; \\
 \psi_{2i} = \frac{1}{(i-2)!} y'^{i-2} + \frac{1}{i!} \sum_{k=1}^{\infty} (-\alpha_3)^k \cdot \left(\frac{k(n+4)!}{[k(n+4)-2]!} \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^k \frac{[k(n+4)+i-4]!}{[k(n+4)+i]!} \right) y'^{k(n+4)+i-2}; \\
 \psi_{3i} = \frac{1}{(i-3)!} y'^{i-3} + \frac{1}{i!} \sum_{k=1}^{\infty} (-\alpha_3)^k \cdot \left(\frac{k(n+4)!}{[k(n+4)-3]!} \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^k \frac{[k(n+4)+i-4]!}{[k(n+4)+i]!} \right) y'^{k(n+4)+i-3}; \quad (30)
 \end{cases}$$

由式(30)可得:

$$\psi_{ji} = \frac{1}{(i-j)!} y'^{i-j} + \frac{1}{i!} \sum_{k=1}^{\infty} (-\alpha_3)^k \cdot \left(\frac{k(n+4)!}{[k(n+4)-j]!} \right) \cdot \left(\prod_{k=1}^k \frac{[k(n+4)+i-4]!}{[k(n+4)+i]!} \right) y'^{k(n+4)+i-j}. \quad (31)$$

由式(28)~(31)可得通解表达式:

$$\begin{cases}
 x = \sum_{i=0}^5 i! \psi_{0i} a_i; \\
 \varphi = \sum_{i=0}^5 i! \psi_{1i} a_i; \\
 M = \sum_{i=0}^5 i! \psi_{2i} a_i; \\
 Q = \sum_{i=0}^5 i! \psi_{3i} a_i. \quad (32)
 \end{cases}$$

2 通解的初值

由第1节可得,桩身位移 x ,转角 φ ,弯矩 M 和剪力 Q 均可由 a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 和 a_5 的值来确定,故归根结底是确定上述6个值。 a_4, a_5 由外部荷载直接确定,见图1,与桩身支承无关;其余4个值可由已知条件或支承条件确定,根据不同支承条件可分为以下几种。桩顶支承条件:已知 M_0 和 Q_0 的自由支承、已知 x_0 和 M_0 的铰支承、已知 x_0 和 φ_0 的固定支承和已知 φ_0 和 Q_0 的竖向固定支承;桩端支承条件:已知 M_h 和 Q_h 的自由支承、已知 x_h 和 M_h 的铰支承、已知 x_h 和 φ_h 的固定支承、已知 Q_h 的弹性自由支承和已知 x_h 的弹性铰支承,最后两个桩端支承条件还包含如下关系:

$$M_h = -\varphi_h C_0 I_0. \quad (33)$$

式中: I_0 为基底面积对其形心轴的抗弯惯性矩; C_0 为基底土的竖向地基系数, $C_0 = m_0 h$ 。

式(16)、(31)与上述两表联立即可解得 a_0, a_1, a_2, a_3 ,由文献[4-5]得桩顶未知初值通式如下:

$$a_p(0) = \sum_{r=2}^5 f_{pr} a_r(0) \quad (p = \eta, \zeta). \quad (34)$$

式中: $a_p(0)$ 为待求的桩顶未知初值; $a_r(0)$ 为已知的荷载初值; f_{pr} 为桩顶未知初值计算的无量纲系数,计算如下式:

$$\begin{aligned}
 f_{\eta r} = & ((\psi_{\alpha\zeta}(h)\psi_{\beta r}(h) - \psi_{\beta\zeta}(h)\psi_{\alpha r}(h)) + \\
 & K_h(\psi_{\gamma\zeta}(h)\psi_{\theta r}(h) - \psi_{\theta\zeta}(h)\psi_{\gamma r}(h))/((\psi_{\alpha\eta}(h)\psi_{\beta\zeta}(h) - \\
 & \psi_{\beta\eta}(h)\psi_{\alpha\zeta}(h)) + K_h(\psi_{\gamma\eta}(h)\psi_{\theta\zeta}(h) - \psi_{\theta\eta}(h)\psi_{\gamma\zeta}(h))). \quad (35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{\zeta r} = & ((\psi_{\beta\eta}(h)\psi_{\alpha r}(h) - \psi_{\alpha\eta}(h)\psi_{\beta r}(h)) + \\
 & K_h(\psi_{\theta\eta}(h)\psi_{\gamma r}(h) - \psi_{\gamma\eta}(h)\psi_{\theta r}(h))/((\psi_{\alpha\eta}(h)\psi_{\beta\zeta}(h) -
 \end{aligned}$$

$$\psi_{\beta\eta}(h)\psi_{\alpha\zeta}(h)) + K_h(\psi_{\gamma\eta}(h)\psi_{\alpha\zeta}(h) - \psi_{\theta\eta}(h)\psi_{\gamma\zeta}(h))). \quad (36)$$

$$\psi_{pr}(Y) = \frac{Y^{r-p}}{\Gamma(r-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(r)} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\Gamma[k(n+4)+r]}{\Gamma[k(n+4)+r-p+1]} \prod_{k=1}^k \frac{\Gamma[k(n+4)+r-4]}{\Gamma[k(n+4)+r]} \cdot Y^{k(n+4)+r-p} (p=0 \sim 3, r=0 \sim 5). \quad (37)$$

式中: k, n 均为整数, $Y = y(\alpha_3)^{\frac{1}{n+1}}$. 下标 $\alpha, \beta, \gamma, \theta$ 与底端支承条件有关: 自由支承 $K_h = 0, \alpha = 2, \beta = 3$; 铰支承 $K_h = 0, \alpha = 0, \beta = 2$; 固定支承 $K_h = 0, \alpha = 0, \beta = 1$; 弹性自由支承 $K_h = C_0 I_0 / (\alpha EI), \alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 1, \theta = 3$; 弹性铰支承 $K_h = C_0 I_0 / (\alpha EI), \alpha = 0, \beta = 2, \gamma = 0, \theta = 1$. 下标 r 与荷载初值有关, 当 r 分别为 2、3、4、5 时, 表示桩承受顶端力矩顶端力均布荷载三角形分布荷载的单独作用. 下标 η 和 ζ 则表示欲求的未知初值, 与桩底支承受力条件有关: 自由支撑取 0, 1; 铰支撑取 1, 3; 固定支撑取 2, 3; 竖向固定支撑取 0, 2.

3 结论

笔者推导出了考虑计算宽度非线性的横向受荷桩的通解如式(16) ~ (17). 为使通解简单实用, 笔者还推导了计算宽度为常数的横向受荷桩的通解如式(32): 若使 $y_0 = 0$, 就等价于范文田通解; 若使 $q_0 = 0, n_0 = 0$, 就等价于王伯惠通解. 同时, 总结了目前常用的桩端初值, 使得整个基于地基系数法的桩身内力计算方法更加完整和实用.

参考文献:

- [1] 常保平. 多年冻土地区冻土地温和季节融深对桩基地基系数的影响[J]. 冰川冻土, 1988, 19(1): 15-21.
- [2] 黄杰, 王旭. 横向受载桩计算宽度的非线性模型及其解[J]. 四川建筑, 2005, 25(5): 51-52.
- [3] 范文田. 侧向梯形荷载受力桩的通解[J]. 铁道学报, 1980, 20(4): 58-63.
- [4] 张耀年. 横向受荷桩的通解[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(1): 84-86.
- [5] 张耀年. 横向受荷桩分析与计算的地基系数法[J]. 福建建设科技, 2008(6): 1-3.
- [6] 王伯惠. 横向荷载作用下不同土层内变截桩的一般解[J]. 东北公路, 1992(4): 27-37.
- [7] 徐风云, 王伯惠. 嵌岩桩的横向承载能力计算二[J]. 东北公路, 1993(2): 19-30.
- [8] 徐风云, 王伯惠. 嵌岩桩的横向承载能力计算(一)[J]. 东北公路, 1993(1): 46-56.
- [9] 王伯惠. 中国钻孔灌注桩新发展[M]. 北京: 人民交通出版社, 1999: 74-83.
- [10] 黄杰, 王旭. 横向受载桩计算宽度的非线性模型及其解[J]. 四川建筑, 2005, 25(5): 51-54.
- [11] 王玉萍, 王玉峰, 王旭. 多年冻土地区推力桩的地基系数双参数法计算模型[J]. 四川建筑, 2014, 34(1): 75-76.

The Study of Lateral Load Pile General Solution Based on Modulus of Subgrade Reaction

HE Shuanhai, HE Xiaowei

(School of Highway, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: In order to improve the general solution of pile internal force calculation based on foundation coefficient method, the general solution considering the width nonlinearity of piles was derived based on Winkler assumption and method of power series, and the linear general solution was proposed through simplification. The present computing theory based on foundation coefficient method was developed and unified as a result of this study. From the analysis of initial value conditions, 4 kinds of pile top boundary and 5 kinds of pile end boundary, which are commonly used at present, were summarized.

Key words: modulus of subgrade reaction; laterally loaded pile; general solution; foundation ratio; boundary conditions