

文章编号:1671-6833(2013)05-0038-05

Mindlin-Reissner 板屈曲分析的光滑有限元法

贾程¹, 陈国荣²

(1. 盐城工学院 土木工程学院, 江苏 盐城 224051; 2. 河海大学 工程力学系, 江苏 南京 210098)

摘要:采用一阶 Mindlin-Reissner 板理论(FSDT),应用光滑有限元法分析板的屈曲问题.通过使用应变光滑技术,沿单元内的光滑格子边界积分形成单元的弯曲刚度矩阵和几何刚度矩阵.为了避免剪切锁定问题,采用混合插值法计算剪切应变.利用该光滑板单元分别分析板的单轴受压、双轴受压和平面内纯剪三种情况下的屈曲临界荷载.数值算例表明,光滑板单元不存在剪切锁定问题,和混合插值四边形板单元 MITC4 相比具有较高的精度,而且最重要的是其对网格畸变不敏感,摆脱了传统等参元对单元形状的限制.

关键词:屈曲临界荷载;光滑有限元;应变光滑;Mindlin Reissner 板理论

中图分类号: O342;TU311.2 **文献标志码:** A **doi:**10.3969/j.issn.1671-6833.2013.05.008

0 引言

板是一种在实际工程中有着广泛应用的结构.当承受的面内压缩、剪切荷载达到临界荷载时,会导致板屈曲失稳.由于解析方法的限制,板的屈曲分析通常采用数值方法,其中有限元法较为普遍.然而,采用一阶 Mindlin-Reissner 板理论的单元会发生剪切锁定问题.解决方法有混合插值法^[1](MITC)、增强假设应变法(EAS)^[2]等.

最近,Liu 等^[3]将无网格法中的应变光滑技术与有限元法结合,提出了光滑有限单元法.光滑有限单元能够软化刚度矩阵,改善有限元法中刚度矩阵过于“刚硬”的现象,能够显著地提高计算精度.光滑有限元已被应用于分析二维固体弹塑性^[4]等问题中.

基于一阶 Mindlin-Reissner 板理论,笔者尝试将光滑有限元应用于分析板的屈曲问题.在张量分量混合插值四边形板单元 MITC4^[1](Mixed Interpolation of Tensorial Components)基础上,使用应变光滑技术,单元的刚度矩阵沿单元内的光滑域边界积分而形成.剪切应变同样由混合插值法计算.使用该光滑有限元分析板在单轴受压、双轴受压和平面内纯剪 3 种情况下的屈曲临界荷载,结果表明光滑板单元具有较高的精度,没有剪切

锁定问题,而且最重要的是其对网格畸变不敏感.

1 Mindlin-Reissner 板的有限元公式

图 1 所示为四边形 Mindlin 等参板单元.在图中笛卡儿坐标系中: z 轴与 x, y 轴垂直向上;板厚度为 t .令 w 为中面的挠度, θ_x, θ_y 中面关于 y 轴和 x 轴的夹角.板内任一点位移分量为 $\mathbf{u}^T = [w \ \theta_x \ \theta_y]$.

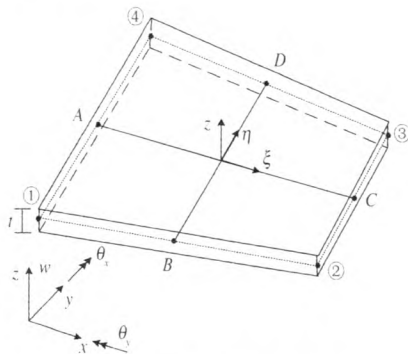


图 1 四节点四边形板单元

Fig. 1 Four node quadrilateral plate element

则板的弯曲应变,剪切应变分别为

$$\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{L}_d \boldsymbol{\theta}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \nabla w + \boldsymbol{\theta}, \quad (1)$$

式中: $\boldsymbol{\theta}^T = [\theta_x \ \theta_y]$; \mathbf{L}_d^T 为微分算子矩阵; D 为梯度算子.

对于屈曲分析,标准的伽辽金弱式为.

收稿日期:2013-03-30;修订日期:2013-06-19

基金项目:住建部资助项目(2012-K4-21);盐城工学院人才基金项目(XKR2011016)

作者简介:贾程(1981-),男,江苏镇江人,盐城工学院讲师,博士,主要从事工程结构数值方法研究,E-mail:jctnm@163.com.

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D}^b \boldsymbol{\kappa} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}^s \boldsymbol{\gamma} d\Omega + \int_{\Omega} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^g)^T \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\varepsilon}^g d\Omega = 0. \quad (2)$$

$$\text{其中 } \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_x^0 & \sigma_{xy}^0 \\ \sigma_{xy}^0 & \sigma_y^0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} t \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t^3}{12} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t^3}{12} \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^g = \begin{bmatrix} w_{,x} & w_{,y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{x,x} & \theta_{x,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{y,x} & \theta_{y,y} \end{bmatrix}^T,$$

\mathbf{D}^b 、 \mathbf{D}^s 分别为弯曲弹性矩阵和剪切弹性矩阵。

设问题域被划分成 N_e 个单元,则单元内任意一点的位移可写成

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^{N_n} \begin{bmatrix} N_i(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & N_i(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & N_i(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \mathbf{d}_i, \quad (3)$$

式中: $N_i(\mathbf{x})$, $\mathbf{d}_i = [w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi}]^T$ 分别是节点 i 的形函数和节点自由度。

则弯曲应变,剪切应变和几何应变可分别写成

$$\boldsymbol{\kappa} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i^b \mathbf{d}_i, \boldsymbol{\gamma} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i^s \mathbf{d}_i, \boldsymbol{\varepsilon}^g = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i^g \mathbf{d}_i, \quad (4)$$

$$\text{其中 } \mathbf{B}_i^b = \begin{bmatrix} 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} \\ 0 & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_i^s = \begin{bmatrix} N_{i,x} & N_i & 0 \\ N_{i,y} & 0 & N_i \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_i^g = \begin{bmatrix} N_{i,x} & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,x} & N_{i,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & N_{i,y} \end{bmatrix}^T.$$

将上式代入伽辽金弱式中,可得

$$(\mathbf{K} - \lambda_{cr} \mathbf{G}) \mathbf{d} = 0. \quad (5)$$

λ_{cr} 为临界屈曲荷载,其单元刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_i^b)^T \mathbf{D}^b \mathbf{B}_i^b d\Omega + \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_i^s)^T \mathbf{D}^s \mathbf{B}_i^s d\Omega. \quad (6)$$

单元几何刚度矩阵为:

$$\mathbf{G}_e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B}_i^g)^T \boldsymbol{\tau} \mathbf{B}_i^g d\Omega. \quad (7)$$

2 应变光滑四边形板单元

笔者将应变光滑技术应用到传统的四边形板单元中,并使用混合插值法计算剪切应变,推导出板屈曲分析的应变光滑四边形板单元 MISC4

(Mixed Interpolation and Smoothed Curvatures) 表达式。

应变光滑技术是 Chen^[5] 为了克服无网格点积分法的不稳定性和改善其低精度而提出的方法。后来王东东^[6] 等又研究了其应力计算方法。

将应变光滑技术应用到板中,在任意点的光滑弯曲应变可表示为

$$\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^h(\mathbf{x}_c) = \int_{\Omega^h} \boldsymbol{\kappa}^h(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) d\Omega, \quad (8)$$

式中: Φ 是光滑函数,需满足 $\Phi \geq 0$ 和 $\int_{\Omega^h} \Phi d\Omega = 1$ 条件。为简单起见, Φ 取如下的阶越函数

$$\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) = \begin{cases} 1/A_c, & \mathbf{x} \in \Omega_c \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_c \end{cases}, \quad (9)$$

其中 A_c 是 \mathbf{x}_c 所在光滑格子 Ω_c 的面积。理论上,每个单元也可以分成任意个光滑格子,文献[3]指出分成4个格子是最佳的方式。图2所示四节点四边形单元被划分成四个光滑格子方式,每个光滑格子由节点和辅助中点构成。

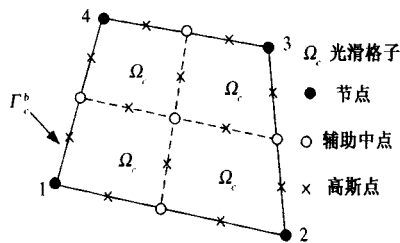


图 2 一个单元内的四个四边形光滑格子

Fig.2 Four quadrilateral smoothing cells in an element

将(9)式代入式(8)中,应用散度定理,可得

$$\tilde{\boldsymbol{\kappa}}_{ij}^h(\mathbf{x}_c) = \frac{1}{2A_c} \int_{\Omega_c} \left(\frac{\partial \theta_i^h}{\partial x_j} + \frac{\partial \theta_j^h}{\partial x_i} \right) d\Omega$$

$$= \frac{1}{2A_c} \int_{\Gamma_c} (\theta_i^h n_j + \theta_j^h n_i) d\Gamma, \quad (10)$$

式中: n_i 为单位外法线向量的分量。在光滑有限元中,假设光滑应变在光滑域中为常数,即 $\tilde{\boldsymbol{\kappa}}_{ij}^h = \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_{ij}^h(\mathbf{x}) = \tilde{\boldsymbol{\kappa}}_{ij}^h(\mathbf{x}_c)$ 。将式(3)代入上式中,得

$$\tilde{\boldsymbol{\kappa}}^h = \sum_{i=1}^4 \tilde{\mathbf{B}}_{Ci}^b \mathbf{d}_i = [\tilde{\mathbf{B}}_{C1}^b \quad \tilde{\mathbf{B}}_{C2}^b \quad \tilde{\mathbf{B}}_{C3}^b \quad \tilde{\mathbf{B}}_{C4}^b] \mathbf{d}$$

$$= \tilde{\mathbf{B}}_c^b \mathbf{d}, \quad (11)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{Ci}^b = \frac{1}{A_c} \int_{\Gamma_c} \begin{bmatrix} 0 & N_i n_x & 0 \\ 0 & 0 & N_i n_y \\ 0 & N_i n_y & N_i n_x \end{bmatrix} d\Gamma. \quad (12)$$

N_i 是传统四边形线性等参元形函数,式(12)中对每个光滑格子边界的线积分采用一个积分点高斯积分已足够,该高斯点即为边中点,如图2所示。

则式(12)可写成

$$\tilde{\mathbf{B}}_{Ci}^b = \frac{1}{A_c} \sum_{b=1}^{nb} \begin{bmatrix} 0 & N_i(x_b^c)n_x & 0 \\ 0 & 0 & N_i(x_b^c)n_y \\ 0 & N_i(x_b^c)n_y & N_i(x_b^c)n_x \end{bmatrix} l_b \quad (13)$$

式中: x_b^c 为光滑格子第 b 个边界线段上的高斯点; l_b 为该边界线段的长度; nb 为光滑格子边界线段的个数, 文中 $nb = 4$.

则光滑化的单元弯曲刚度矩阵可写成

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_e^b &= \int_{\Omega_e} (\tilde{\mathbf{B}}_C^b)^T \mathbf{D}^b \tilde{\mathbf{B}}_C^b d\Omega = \sum_{c=1}^{nc} \int_{\Omega_c} (\tilde{\mathbf{B}}_C^b)^T \mathbf{D}^b \tilde{\mathbf{B}}_C^b d\Omega_c \\ &= \sum_{c=1}^{nc} (\tilde{\mathbf{B}}_C^b)^T \mathbf{D}^b \tilde{\mathbf{B}}_C^b A_c. \end{aligned} \quad (14)$$

由于 $\tilde{\mathbf{K}}^b$ 在光滑格子 Ω_c 中为常数, 故光滑应变一位移 $\tilde{\mathbf{B}}_C^b$ 为常数, 积分式可以写成代数式. 式中 nc 为单元内光滑格子数, 文中 $nc = 4$.

同样, 可以得到光滑四边形板单元 MISC4 的几何刚度矩阵

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{G}}_e &= \int_{\Omega_e} (\tilde{\mathbf{B}}_C^g)^T \boldsymbol{\tau} \tilde{\mathbf{B}}_C^g d\Omega = \sum_{c=1}^{nc} \int_{\Omega_c} (\tilde{\mathbf{B}}_C^g)^T \boldsymbol{\tau} \tilde{\mathbf{B}}_C^g d\Omega_c \\ &= \sum_{c=1}^{nc} (\tilde{\mathbf{B}}_C^g)^T \boldsymbol{\tau} \tilde{\mathbf{B}}_C^g A_c. \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\tilde{\mathbf{B}}_C^g = [\tilde{\mathbf{B}}_{C1}^g \quad \tilde{\mathbf{B}}_{C2}^g \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{B}}_{C4}^g], i = 1, 2, 3, 4.$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{Ci}^g = \begin{bmatrix} N_i(x_b^c)n_x & N_i(x_b^c)n_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i(x_b^c)n_x & N_i(x_b^c)n_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i(x_b^c)n_x & N_i(x_b^c)n_x \end{bmatrix}^T$$

使用中厚板理论建立的有限元公式在分析薄板时, 存在剪切锁定问题, 为了避免这一现象, 对剪切应变不使用通常的式(4)插值, 而使用混合插值法^[1]. 则单元的剪切刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_e^s = \int_{\Omega_e} (\mathbf{B}_i^s)^T \mathbf{D}^s \mathbf{B}_i^s d\Omega, \quad (16)$$

其中

$$\mathbf{B}_i^s = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} N_{i,\xi} & -b_i^{12} N_{i,\xi} & b_i^{11} N_{i,\xi} \\ N_{i,\eta} & -b_i^{22} N_{i,\eta} & b_i^{21} N_{i,\eta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} b_i^{11} &= \xi_i x_{,\xi}^M, b_i^{12} = \xi_i y_{,\xi}^M, b_i^{21} = \eta_i x_{,\eta}^L, \\ b_i^{22} &= \eta_i y_{,\eta}^L. \end{aligned}$$

$\xi_i \in \{-1, 1, 1, -1\}, \eta_i \in \{-1, -1, 1, 1\} (i, M, L) \in \{(1, B, A); (2, B, C); (3, D, C); (4, D, A)\}, A, B, C, D$ 点如图 1 所示, \mathbf{J} 为雅可比矩阵.

则光滑四边形板单元 MISC4 的刚度矩阵为

$$\tilde{\mathbf{K}}_e = \tilde{\mathbf{K}}_e^b + \mathbf{K}_e^s. \quad (17)$$

则由式(17)与(15)及 $\mathbf{K} = \sum_i^{Ne} \tilde{\mathbf{K}}_e$ 和 $\mathbf{G} = \sum_i^{Ne} \tilde{\mathbf{G}}_e$ 可得系统的刚度矩阵和几何刚度矩阵, 利用式(5)求解特征方程即可得临界屈曲荷载 λ_{cr} .

3 数值算例

定义屈曲荷载因子 $K = \lambda_{cr} b^2 / (\pi^2 D)$, 其中 b 为板的宽度, λ_{cr} 为临界屈曲荷载, 弹性模量 $E = 2.0 \times 10^{11}$ Pa, 泊松比 $\nu = 0.3$. C、S 分别代表固支和简支.

3.1 单轴受压的矩形板

矩形板如图 3(a) 所示, 板的边长比 $a/b = 1$, 厚宽比 $t/b = 0.01$. 考虑单轴受压情况, 如图 3(b) 所示. 网格划分采取 $4 \times 4, 8 \times 8, 12 \times 12, 16 \times 16, 20 \times 20$ 的规则网格和畸变网格. 畸变网格中单元的所有内角都小于 180° . 图 4(a) 所示为采用的 8×8 的畸变网格. 考虑板的边界条件为四边固支(CCCC). MISC4 单元和 MITC4 单元在这些网格划分下屈曲荷载因子 K 的计算结果列于表 1.

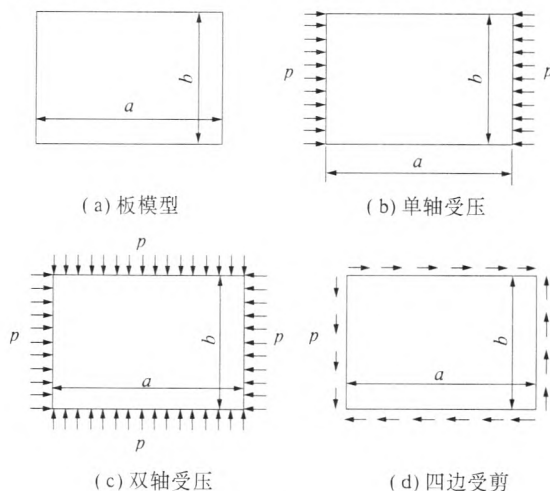


图 3 矩形板

Fig. 3 Rectangular plates

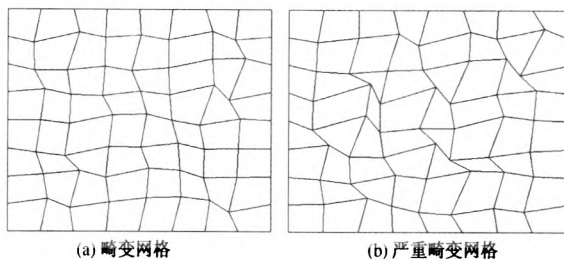


图 4 两类 8×8 畸变网格

Fig. 4 Two types of 8×8 distorted meshes

从表 1 可以看出, 随着网格的加密, MISC4 单元收敛于精确解, 而且对于规则网格和畸变网格, MISC4 单元的误差都小于 MITC4 单元, 尤其对于稀疏的畸变网格的情况.

表 1 单轴受压矩形固支板的屈曲荷载因子 K

Tab. 1 The buckling load factor K of rectangular CCCC plates under axial compression loading

网格	单元	4 × 4	8 × 8	12 × 12	16 × 16	20 × 20
规则	MISC4	15.605 0	11.095 6	10.492 7	10.294 2	10.204 3
	误差/%	55.0	10.2	4.2	2.2	1.3
	MITC4	15.633 0	11.101 7	10.495 5	10.295 7	10.205 3
	误差/%	55.2	10.2	4.2	2.2	1.3
畸变	MISC4	17.038 8	11.329 6	10.605 9	10.342 3	10.244 8
	误差/%	69.2	12.5	5.3	2.7	1.7
	MITC4	17.190 3	11.353 7	10.612 9	10.349 5	10.247 1
	误差/%	70.7	12.7	5.4	2.8	1.8
精确解 ^[7] : 10.070						

考虑图 4(b)所示严重畸变的网格,其中有两个网格中有一个内角大于 180°. 使用此网格, MISC4 单元和 MITC4 单元的计算结果分别为 11.649 3 和 13.057 8, 误差分别为 15.68% 和 29.67%. 显然由于严重畸变的网格, MITC4 单元精度大为下降, 明显低于 MISC4 单元, 表明 MISC4 单元在严重畸变的网格下能够保持良好的精度. 这是由于 MISC4 单元的刚度矩阵中没有使用映射或者坐标转换矩阵, 因而其单元可以是任意的畸变的形状, 摆脱了传统等参元对单元形状的限制.

为了研究单元是否存在剪切锁定现象, 考虑边长比 $a/b = 1$, 对边固支另对边简支 (CSCS) 的正方形板, 以厚宽比 t/b 为参数. 采用 12×12 的规则网格划分, 屈曲荷载因子 K 结果列于表 2.

从表 2 可以看出, 随着板的厚度变薄, MISC4 单元的误差并没有增大. 其结果与其它方法的结果较为一致, 非常接近精确解, 表明 MISC4 单元没有剪切锁定现象.

表 2 不同厚宽比矩形板的单轴屈曲荷载因子 K

Tab. 2 The buckling load factor K of rectangular plates under axial compression loading with various thickness-span aspect ratios

t/b	MK ^[8]	MITC4	MISC4	精确解 ^[7]
0.2	4.347 7	4.148 2	4.149 0	4.320 4
误差/%	0.6	-4.0	-4.0	
0.1	6.380 5	6.353 1	6.350 7	6.369 8
误差/%	0.2	-0.3	-0.3	
0.05	7.310 9	7.452 9	7.447 6	7.298 9
误差/%	0.2	2.1	2.0	
0.001	7.718 1	7.936 2	7.929 2	7.691 1
误差/%	0.4	3.2	3.1	

3.2 双轴受压的矩形板

考虑边长比 $a/b = 1$ 的正方形板, 其受双向压力, 如图 3(c) 所示. 使用 16×16 规则网格, 表 3

给出了不同边界条件下屈曲荷载因子 K . 从表 3 可以看出, 在不同的边界条件下, MISC4 单元的结果都与解析解和样条有限条法^[9]较为吻合.

3.3 四边受剪的矩形板

考虑受平面内剪力的四边简支矩形板, 如图 3(d) 所示. 使用 16×16 规则网格, 厚宽比 $t/b = 0.01$, 表 4 列出了边长比 a/b 取不同数值时, 屈曲荷载因子 K 的计算结果.

表 3 不同边界条件双轴受压矩形板屈曲荷载因子 K

Tab. 3 The buckling load factor K of rectangular plates under biaxial compression loading with various boundaries

约束条件	Tham ^[9]	MITC4	MISC4	精确解 ^[7]
SSSS	2.00	2.009 3	2.009 9	2.00
误差/%	0.0	0.5	0.5	
CCCC	5.61	5.399 8	5.399 6	5.31
误差/%	5.6	1.7	1.7	
SCSC	3.83	3.885 1	3.885 5	3.83
误差/%	0.0	1.4	1.4	

表 4 不同边长比四边受剪矩形板的屈曲荷载因子 K

Tab. 4 The buckling load factor K of rectangular plates under in-plane shear with various length-to-width ratios

a/b	MITC4	MISC4	精确解 ^[7]
1.0	9.614 3	9.598 6	9.34
误差/%	2.9	2.8	
2.0	6.796 4	6.782 1	6.34
误差/%	7.2	7.0	
3.0	6.104 6	6.081 5	5.784
误差/%	5.5	5.1	
4.0	5.949 9	5.913 2	5.59
误差/%	6.4	5.8	

从表 4 可以看出, 在不同的边长比下, MISC4 的误差较小, 优于 MITC4 单元, 都非常接近精确解.

4 结论

根据一阶 Mindlin-Reissner 板理论,将应变光滑技术与有限元四边形板单元相结合,推导出应变光滑四边形板单元 MISC4 分析屈曲问题的表达式.剪切应变由混合插值法得到.三个数值算例验证了该单元的正确性,表明了该单元不存在剪切锁定问题,具有较高的精度.最重要的是其对网格畸变不敏感,应变光滑有限元,能够显著改善传统有限元过于“刚硬”的现象,克服网格畸变的缺点,对于分析大变形问题或网格畸变问题有优势,具有良好的应用前景.

参考文献:

- [1] BATHE K J, DVORKIN E N. A formulation of general shell elements. the use of mixed interpolation of tensorial components [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1986, 22 (3): 697 - 722.
- [2] SIMO J C, RIFAI M S. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990, 29(8): 1595 - 1638.
- [3] LIU Gui-rong, DAI Kai-yu. A smoothed finite element for mechanics problems [J]. Computational Mechanics, 2007, 39 (6): 859 - 877.
- [4] CUI Xiang-yang, LIU Gui-rong. Analysis of elastic - plastic problems using edge-based smoothed finite element method [J]. International Journal of Pressure Vessels and Piping, 2009, 86(10): 711 - 718.
- [5] CHEN Jiun-shyan, WU Cheng-tang, YOON S. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50(2): 435 - 466.
- [6] 王东东, 李凌, 张灿辉. 稳定节点积分伽辽金无网格法的应力计算方法研究 [J]. 固体力学学报, 2009, 30(6): 586 - 591.
- [7] TIMOSHENKO S P, GERE J M. Theory of elastic stability [M]. third ed. New York: McGraw-Hill, 1970.
- [8] BUI T Q, NGUYEN M N, ZHANG Chuan-zeng. Buckling analysis of Reissner-Mindlin plates subjected to in-plane edge loads using a shear-locking-free and meshfree method [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2011, 35(9): 1038 - 1053.
- [9] THAM L G, SZETO H Y. Buckling analysis of arbitrary shaped plates by spline finite strip method [J]. Computers & Structures, 1990, 36 (4): 729 - 735.

A Smoothed Finite Element Method for Buckling Analysis of Reissner-Mindlin Plates

JIA Cheng¹, CHEN Guo-rong²

(1. School of Civil Engineering, Yancheng Institute of Technology, Yancheng 224051, China; 2. Department of Engineering Mechanics, Hohai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: A smoothed finite element method is applied to buckling analysis of plate, by using the first-order Reissner - Mindlin plate theory (FSDT). The bending stiffness matrix and geometrical stiffness matrix for element used strain smoothing technique is calculated by a boundary integral along the boundaries of the smoothing cells in element. The mixed interpolation method is employed to calculate shear strains in order to avoid shear locking. Buckling loads of plates subject to uniformly uniaxial, biaxial compression and pure shear in-plane are studied using the smoothed plate element respectively. Numerical examples show that the smoothed plate element is free of shear locking and achieves the high accuracy, compared with mixed interpolation plate element MITC4. And the most significant property is their insensitivity to mesh distortion so that the restriction on the shape of classical isoparametric elements can be removed.

Key words: buckling critical load; smoothed finite element method; strain smoothing; Reissner-Mindlin plate theory