

改进型无网格迦辽金法在稳定热传导中的应用

夏茂辉, 赵玉凤, 吕 鹏, 翟育鹏, 任伟和

(燕山大学 理学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘 要: 对移动最小二乘近似(MLS)中的基函数进行改进, 此近似方案中的基函数采用带权的正交基函数, 从而形成一种改进的移动最小二乘近似(IMLS), 该近似比现有的移动最小二乘近似有更高的精度和效率, 且不会导致系统方程产生病态. IMLS近似与迦辽金法(EFGM)相结合构成了一种改进型无网格迦辽金法(IEFGM), 用IEFGM对矩形域和圆域内的稳定热传导问题进行了分析. 通过计算实例并编制MATLAB程序表明, 该方法是一种收敛快、精度高、简便有效的方法.

关键词: 移动最小二乘近似; 无网格迦辽金法; 温度场

中图分类号: O315; TK124

文献标志码: A

doi: 10.3969/j.issn.1671-6833.2012.06.017

0 引言

近年来, 无网格法已经发展成为一种功能较强、稳定性高的数值计算方法, 而无网格迦辽金法(EFGM)是发展最为成熟的一种无网格法. 传统的移动最小二乘法构造出一个近似函数^[1], 它的光滑性好且导数连续, 其形函数及其导数仅与节点有关, 但此方法容易导致系统方程病态, 于是在此近似方案中采用带权的正交基函数, 形成一种改进的移动最小二乘近似(IMLS). IMLS近似与EFGM相结合构成了IEFGM, 该方法避免了矩阵求逆, 且计算量小、数值稳定性好, 不会形成病态方程组, 因此有更高的计算速度和精度, 在弹性力学和断裂力学中已得到了充分应用^[2-5], 但在温度场中还未得到深入研究. 笔者在文献[6]的基础上对移动最小二乘近似进行改进, 用IEFG法求解稳态热传导问题, 并将其方法应用到矩形域和圆形域中, 并与EFG法和精确解^[7-8]进行比较, 应用MATLAB编程将其结果进行可视化处理, 表明该方法是一种收敛快、精度高、简便有效的方法.

1 移动最小二乘近似^[1]

考虑点 x 的邻域 Ω_x , 它位于全域 Ω 内, 为求近似函数, 在子域 Ω_x 中随机分布有限个节点 x_i (i

$= 1, 2, \dots, n$), 函数 T 的近似表达式 $T^h(x)$, $\forall x \in \Omega_x$, 可以定义为:

$$T^h(x) = \sum_{j=1}^m p_j(x) a_j(x) = P^T(x) a(x) \quad (1)$$

式中: $P^T(x) = [p_1(x) \ p_2(x) \ \dots \ p_m(x)]$ 是 m 次完备单项式的基; $a(x)$ 是包含系数 $a_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$ 的向量, 这些系数是空间坐标 $x = [x \ y]$ 的函数. 对于二维问题:

线性基

$$P^T(x) = [1 \ x \ y], m=3;$$

二次基

$$P^T(x) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2], m=6.$$

定义加权离散 L_2 模为:

$$J(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) [P^T(x_i) a(x_i) - T_i]^2. \quad (2)$$

式中: $w_i(x)$ 是节点 i 在 x 的权函数; T_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 是节点 i 处的名义节点值, 一般它不是未知试函数 $T^h(x)$ 的节点值; n 为插值基点数.

式(2)可用矩阵形式表达为:

$$J = (Pa - T)^T W(x) (Pa - T). \quad (3)$$

其中,

$$T^T = [T_1 \ T_2 \ \dots \ T_n];$$
$$P = \begin{bmatrix} p_1(x_1) & p_2(x_1) & \dots & p_m(x_1) \\ p_1(x_2) & p_2(x_2) & \dots & p_m(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_1(x_n) & p_2(x_n) & \dots & p_m(x_n) \end{bmatrix};$$

收稿日期: 2012-06-11; 修订日期: 2012-07-28

基金项目: 秦皇岛市科技攻关计划项目(201001A035)

作者简介: 夏茂辉(1963-), 男, 河北秦皇岛人, 燕山大学教授, 博士, 主要研究方向为无网格法, E-mail: zhizihua666@126.com.

$$W(x) = [w(x - x_i)]_{i,j=1,2,\dots,n}.$$

对(2)式求导,由 $\frac{\partial J}{\partial a}=0$,得

$$A(x)a(x) = B(x)T; \quad (4)$$

由(4)式得:

$$a(x) = A^{-1}(x)B(x)T; \quad (5)$$

将(5)式代入(1)式中,有:

$$T^h(x) = N(x)T = \sum_{i=1}^n N_i(x)T_i. \quad (6)$$

式中,矩阵 $A(x)$, $B(x)$, $N(x)$ 分别为:

$$A(x) = P^T W P = \sum_{i=1}^n w_i(x)p(x_i)p^T(x_i);$$

$$N(x) = [N_1(x) \ N_2(x) \ \dots \ N_n(x)] \\ = P^T(x)A^{-1}(x)B(x);$$

$$B(x) = P^T W = [w_1(x)p(x_1) \ w_2(x)p(x_2) \ \dots \ w_n(x)p(x_n) \\ p(x_n)].$$

为了求出形函数的偏导数,可以先将形函数写为

$$N(x) = C^T(x)B(x).$$

其中, $C(x)$ 满足:

$$A(x)C(x) = P(x).$$

2 改进的移动最小二乘近似

在MLS近似中,式(4)有时是病态的,甚至出现奇异现象,而且难以得到数值解.为克服此缺点,采用IMLS^[2-5]近似.

对于 $\forall f(x), g(x) \in \text{span}(p)$,定义

$$(f, g) = \sum_{i=1}^n w(x - x_i)f(x_i)g(x_i). \quad (7)$$

其中, $\text{span}(p)$ 是Hilbert空间; (f, g) 是内积.对于一系列点 $\{x_i\}$ 和权函数 $\{w_i\}$,若函数 $p_1(x)$, $p_2(x) \dots p_n(x) \in \text{span}(p)$ 且满足:

$$(p_k, p_j) = \sum_{i=1}^n w_i p_k(x_i)p_j(x_i) = \begin{cases} 0, & k \neq j; \\ A_k, & k = j. \end{cases} \\ k, j = 1, 2, \dots, n. \quad (8)$$

所以由式(4)、式(7)可得:

$$A(x) \cdot a(x) = \begin{bmatrix} (p_1, p_1) & (p_1, p_2) & \dots & (p_1, p_m) \\ (p_2, p_1) & (p_2, p_2) & \dots & (p_2, p_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (p_m, p_1) & (p_m, p_2) & \dots & (p_m, p_m) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1(x) \\ a_2(x) \\ \vdots \\ a_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p_1, T_I) \\ (p_2, T_I) \\ \vdots \\ (p_m, T_I) \end{bmatrix}. \quad (9)$$

其中, $I=1, 2, \dots, n$.若 $p_i(x) \in \text{span}(p)$, $i=1, 2,$

\dots, m ; $(p_i, p_j) = 0, i \neq j$,则(9)式为:

$$\begin{bmatrix} (p_1, p_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & (p_2, p_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (p_m, p_m) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1(x) \\ a_2(x) \\ \vdots \\ a_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (p_1, T_I) \\ (p_2, T_I) \\ \vdots \\ (p_m, T_I) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

于是可得 $a_i(x)$ 为:

$$a_i(x) = \frac{(p_i, T_I)}{(p_i, p_i)}, i = 1, 2, \dots, m; I = 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

于是,

$$a(x) = \bar{A}(x)B(x)T. \quad (12)$$

其中,

$$\bar{A}(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(p_1, p_1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(p_2, p_2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{(p_m, p_m)} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

由式(11)和式(6)可得函数 $T^h(x)$ 为:

$$T^h(x) = \bar{N}(x)T = \sum_{i=1}^n \bar{N}_i(x)T_i. \quad (14)$$

其中,

$$\bar{N}(x) = [\bar{N}_1(x) \ \bar{N}_2(x) \ \dots \ \bar{N}_n(x)] = P^T(x)\bar{A}(x)B(x). \quad (15)$$

$P = [p_i]$ 可以表述如下: $p_1 = 1$;

$$p_i = r^{i-1} - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{(r^{i-1}, p_k)}{(p_k, p_k)} p_k, i = 2, 3, \dots. \quad (16)$$

对于一维问题, $r = x_1$;对于二维问题, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ 或 $r = x_1 + x_2$.

3 改进型EFG法(IEFGM)

考虑二维稳态热传导问题.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \rho Q = 0, \text{在 } \Omega \text{ 上;} \\ T = T_0, \text{在 } \Gamma_\varphi \text{ 上;} \\ k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_x + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_y = \bar{q}, \text{在 } \Gamma_q \text{ 上.} \end{cases} \quad (17)$$

式中: T 表示温度; T_0 为初始温度; Γ_φ 为狄利克雷(Dirichlet)边界; Γ_q 为诺依曼(Neumann)边界; ρ 为材料密度; k_x, k_y 是材料沿 x, y 方向的热传导系数; Q 为物体内部的热源密度; n_x 和 n_y 是边界外

法线的方向余弦; \bar{q} 是给定的热流量.

与方程(17)相对应的弱形式为

$$\int_{\Omega} \nabla^T \bar{N} \mathbf{k} \nabla T^h d\Omega - \int_{\Omega} \bar{N} Q d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{N} \bar{q} d\Gamma - C \int_{\Gamma_{\varphi}} \bar{N} (T - T_0) d\Gamma = 0. \quad (18)$$

式中: $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right\}$; T^h 为近似函数; N 为形函数.

把式(14)代入式(18),可得到离散方程:

$$\int_{\Omega} \nabla^T (\bar{N}) \mathbf{k} \nabla (\bar{N} T^*) d\Omega - \int_{\Omega} \bar{N} Q d\Omega - \int_{\Gamma_q} \bar{N} \bar{q} d\Gamma - C \int_{\Gamma_{\varphi}} \bar{N} (\bar{N} T^* - T_0) d\Gamma = 0, \quad (19)$$

即

$$(K_1 + CK_2) T^* = F. \quad (20)$$

其中,

$$K_{1i} = K_{1j} = \int_{\Omega} \mathbf{k} \left(\frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x} \frac{\partial \bar{N}_j}{\partial x} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{k} \left(\frac{\partial \bar{N}_i}{\partial y} \frac{\partial \bar{N}_j}{\partial y} \right) d\Omega;$$

$$K_{2ij} = \int_{\Gamma_q} \bar{N}_i \bar{N}_j d\Gamma;$$

$$F_j = \int_{\Omega} \bar{N}_j Q d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{N}_j \bar{q} d\Gamma + C \int_{\Gamma_{\varphi}} \bar{N}_j T_0 d\Gamma;$$

$$T^* = [T_1 \ T_2 \ \cdots \ T_n].$$

由 IMLS 可得节点温度值

$$T^h = \bar{N}^* T^*. \quad (21)$$

4 数值算例

算例1 圆域上的稳态热传导问题. 考虑单位圆域上的稳态温度分布场,其控制方程为:

$$\nabla^2 T(r, \varphi) = 0, \quad r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$

边界条件为:

$$T(1, \varphi) = 2\sin^2 \varphi + 3\cos^2 \varphi;$$

精确解的直角坐标表达式为^[7]:

$$T(r, \varphi) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} r^2 \cos 2\varphi.$$

如图1在圆域内布置了120个规则节点,高斯积分背景网格与节点相重合,每个网格采用 2×2 高斯积分,采用三次样条权函数和带权的线性正交基函数.由IEFG法得直角坐标系下 $\varphi = 0$ 半径线段上温度曲线对比如图2,温度分布如图3,将改进型无网格迦辽金法(IEFGM)和精确解进行比较.

算例2 三维矩形域上的稳态热传导问题. 立方体边长 $a = b = c = 1$,其控制方程和边界条件如下^[8]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = 0, & \text{在 } \Omega \text{ 上;} \\ T(x, y, z) = x + y + z + xyz, & \text{在 } \Omega \text{ 上.} \end{cases}$$

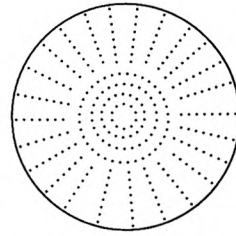


图1 单位圆上的节点分布

Fig.1 Nodes distribution of unit circle

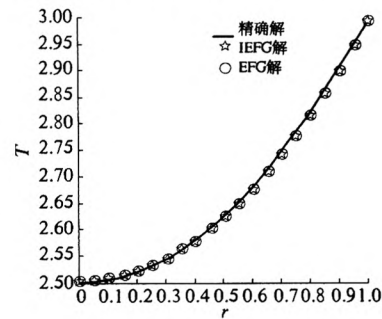


图2 $\varphi = 0$ 半径线段上温度曲线对比图

Fig.2 Temperature change of the radius line at $\varphi = 0$

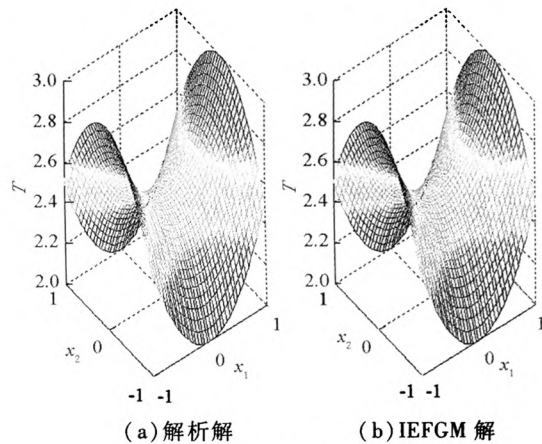


图3 圆域上温度分布

Fig.3 Circular domain temperature distribution

采用均匀布点,布置945个节点对立方体进行离散(165个背景网格),影响域取为立方体影响域,每个背景网格内采用64个高斯积分点,权函数为三次样条权函数,二次正交基函数.图4为 $z = 1$ 时的温度分布对比图.图5为 $z = 1$ 时等温线对比图.将改进型无网格迦辽金法(IEFGM)和精确解进行比较.

由以上数值算例可以看出,通过IEFG法求解稳态热传导问题,结果比无网格迦辽金法精度高,和精确解高度吻合.得知IEFG法可以有效地用于求解矩形域和圆域内稳态热传导问题.

5 结论

(1)无网格迦辽金法仅需要布置节点,不需

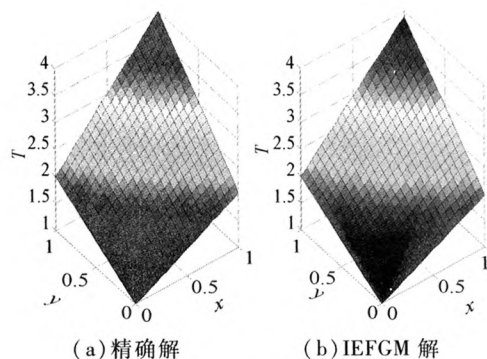
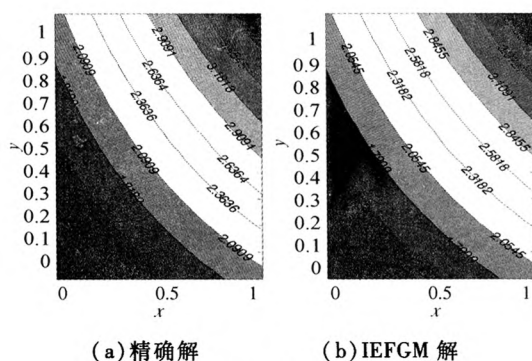
图 4 $z=1$ 时温度分布对比图Fig. 4 Temperature distribution about IEFGM solution and analytical solution at $z=1$ 图 5 $z=1$ 的等温线对比图

Fig. 5 Isothermal on IEFGM solution and analytical solution

要划分单元,其结果与有限元高度吻合,而改进型无网格伽辽金法比伽辽金法有更高的精度和效率,且不会导致系统方程产生病态。

(2) 尝试将改进的无网格伽辽金法应用到求

解矩形域和圆域稳态热传导问题,有较好的精度和效率,且结果与精确解^[7-8]高度吻合,在温度场中具有广泛的应用前景。

参考文献:

- [1] 周晖,李勇. 无网格伽辽金法在二维土体沉降分析中的应用[J]. 湖南科技大学学报:自然科学版, 2009, 24(2): 53-56.
- [2] 程玉民. 移动最小二乘法研究进展与评述[J]. 计算机辅助工程, 2009, 18(2): 5-11.
- [3] ZHANG Zan, LIEW K M, CHENG Yu-min. Coupling of the improved element-free Galerkin and boundary element methods for two-dimensional elasticity problems [J]. Eng Anal Boundary Elem, 2008 (32): 100-107.
- [4] 边燕飞. 改进型无网格伽辽金法(IEFG)的研究及其应用[J]. 合肥工业大学学报:自然科学版, 2009, 32(4): 32-35.
- [5] ZHANG Zan, LIEW K M, CHENG Yu-min. Analyzing 2D fracture problems with the improved element-free Galerkin method [J]. Eng Anal Boundary Elem, 2008, 32: 241-250.
- [6] 高会生. MATLAB 原理与工程应用[M]. 北京:电子工业出版社, 2005.
- [7] 商立英. 非结构化网格上非稳态导热问题的求解与应用[D]. 南京:南京理工大学动力工程学院, 2006.
- [8] 陈琳. 无网格在热传导问题中的应用[D]. 南京:南京理工大学动力工程学院, 2009.

Application of Improved Element-free Galerkin Method in Stable Heat Conduction

XIA Mao-hui, ZHAO Yu-feng, LV Peng, ZHAI Yu-peng, REN Wei-he

(Department of Science, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: This paper presents an improved moving least-square (IMLS) approximation in which the orthogonal function system with a weight function being used as the basis function. The IMLS approximation has a greater computational efficiency and precision than the existing moving least-squares (MLS) approximation, and does not lead to an ill-conditioned system of equations. By combining the element-free Galerkin (EFG) method and the IMLS approximation, an improved element-free Galerkin (IEFG) method for heat conduction is derived. There are two numerical examples that in rectangular and circular domain solved using the IEFG method and that demonstrates the method has a greater computational efficiency and precision, and it is simple and effective.

Key words: moving least-squares approximation (MLS); element-free Galerkin (EFG) method; temperature field