

文章编号:1671-6833(2012)04-0060-05

# 空化水射流空泡溃灭过程的数值分析

杨博凯, 卢义玉, 杨晓峰, 冯明涛, 张 赛

(重庆大学 资源及环境科学学院, 重庆 400030)

**摘 要:** 空化空泡发育与溃灭的计算是研究空化水射流的一个重点和难点. 对比分析了空泡运动方程即 Rayleigh-Plesset 方程的不同数值解法, 并针对固定时间步长的缺点, 提出了变步长法解 Rayleigh-Plesset 方程的思路. 通过优化系数  $\lambda = R_i/R_{i-1}$ , 得出如下分析结果: 在空泡内外压力变化的不同情况下, 变步长法均优于固定步长法且没有奇异点. 变步长法在节约计算量, 保证结果精度等方面都有较好表现, 该方法为研究空化水射流提供新的思路和算法.

**关键词:** 空泡; Rayleigh-Plesset 方程; 固定时间步长; 变步长法

**中图分类号:** TB126

**文献标志码:** A

doi:10.3969/j.issn.1671-6833.2012.04.014

## 0 引言

目前, 高压空化水射流已经应用于很多领域, 如岩石破碎、海上石油钻井、船舶清洗、空化水射流处理有机物废水以及医疗技术等, 但目前对于空泡生成和溃灭的机理还不清楚.

对于空化水射流而言, 其空泡半径与压力、时间存在确定的函数关系, 而三者的关系直接影响空化射流的效率以及能量释放程度. 因此, 旨在研究它们之间关系的空泡动力学方程在空化理论中占有重要的地位.

对于一个包含空泡的液体, 如果已知射流中单个空泡的内外压力, 就可以计算它的半径  $R^{[1]}$ , 同时能够建立一个 Rayleigh-Plesset 方程来近似求得气泡的运动状态<sup>[2]</sup>. 理论上这个方程可以使用常见的任意一种有限元差分法解决, 但由于空泡半径随时间变化的过程是非线性的, 常用的迭代方法在求解 Rayleigh-Plesset 方程时存在困难, 计算量大、精确度低, 特别是在空泡溃灭阶段会产生振荡. 笔者根据变步长法的基本思想, 结合自主研发的空化水射流对各种迭代法的计算效率进行分析, 提出了变步长的 Rayleigh-Plesset 方程计算方法. 变步长法能够更有效地模拟空泡最终溃灭阶

段的能量释放过程, 而这个能量释放过程正是研究其对附近边界产生破坏作用机理的关键<sup>[3-4]</sup>.

## 1 Rayleigh-Plesset 空泡运动方程

Rayleigh-Plesset 方程是解决空泡运动方程的经典方程, 在空化水射流的研究中, 经常需要确定空泡随时间的变化以及最终溃灭放能情况, 而通过 Rayleigh-Plesset 方程可以较为准确地得到空泡半径与时间的关系. 它是一个二阶微分方程<sup>[5]</sup>.

$$\rho \left[ R \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 \right] = p_B - p_\infty - \frac{2\sigma}{R} - \frac{4\mu dR}{R dt} \quad (1)$$

式中:  $\rho$  为液体密度;  $\mu$  为液体运动黏度;  $t$  为时间;  $p_\infty$  为液体静压;  $p_B$  为空泡内的压力.

式(1)可以转换为以下的一阶方程

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, x, y), \quad y(t_0) = y'_0 \quad (3)$$

当  $x$  为因变量时, 令  $R = x$ , 可同时求解式(2)和(3)以得到方程的解. 令:

$$h = \Delta t = t_i - t_{i-1} \quad (4)$$

$$x'_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta t_i} \quad (5)$$

收稿日期: 2012-01-08; 修订日期: 2012-03-10

基金项目: 国家自然科学基金委专项创新研究群体基金资助项目(50621403); 重庆市杰出青年基金资助项目(2009BA6047); 重庆大学研究生科技创新基金资助项目(200802B1B0010289).

作者简介: 杨博凯(1985-), 男, 天津人, 重庆大学研究生, 主要从事高压水射流方面的研究. E-mail: 20046013@cqu.edu.cn.

$$y'_i = \frac{\Delta y_i}{\Delta t_i} \quad (6)$$

采用 Euler 法、Central 法、改进 Euler 法和 Runge-Kutta-Fehlberg 法 4 种有限元拆分法求解<sup>[6-7]</sup>,则需将方程(1)改写成

$$\frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{3R'^2}{2R} + \frac{p_B - p_\infty - 2\frac{\sigma}{R}}{\rho R} - \frac{4\mu R'}{\rho R^2} \quad (7)$$

先将式(7)转变成形如式(2)和式(3)的两个一阶等式,以便应用 Runge-Kutta-Fehlberg 法,令  $x = R$ , 则

$$\frac{dR}{dt} = y, R(t_0) = R_0 \quad (8)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(t, R, y) = -\frac{3y^2}{2R} + \frac{p_B - p_\infty - 2\frac{\sigma}{R}}{\rho R} - \frac{4\mu y}{\rho R^2} y(t_0) = \dot{R}_0 \quad (9)$$

假定  $p_B$  和  $p_\infty$  以及初始条件  $R_0, \dot{R}_0$  已知,便可以通过式(8)和(9)求解空泡半径  $R$ ,即空泡从生长到溃灭的过程中的大小可以以时间的函数来表示。

在式(9)中,变量是  $p_B$  和  $p_\infty$ 。推测空泡中含有杂质气体,其压力为  $p_{g0}$ ,大小为  $R_0$ ,水蒸气压力为  $p_v$ ,在气体不会凝结的前提下,它是一个与温度相关的定值<sup>[9-10]</sup>,因此,笔者将其简化为

$$p_g = p_{g0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 \quad (10)$$

则空泡压力可以表示为

$$p_B = p_v + p_g = p_v + p_{g0} \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 \quad (11)$$

液体压力  $p_\infty(t)$  是一个重要的参数,它关系到空泡成长和溃灭的关键参数  $p_\infty$ 。没有可以直接求得  $p_\infty$  的准确表达式,一般由经验公式来获得,  $p_\infty$  由 CFD 软件模拟的结果获得。

为解 Rayleigh-Plesset 方程,需要先确定某些参数。笔者的测试条件为产生空泡的介质为水,且温度保持在 300 K 不变,水的性能见表 1。

表 1 300 K 时水的性能

Tab. 1 Water properties at 300 K

密度 $\rho$ / ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	黏度 $\mu$ / ( $\text{Pa} \cdot \text{s}$ )	表面张力 $\sigma$ / ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ )	蒸汽压 $p_v$ / MPa
0.996	$0.798 \times 10^{-3}$	0.072	0.004 24

## 2 固定步长法解 Rayleigh-Plesset 方程

### 2.1 固定步长法的基本算法

在满足前述解 Rayleigh-Plesset 方程各项假设的前提下,对于固定步长法的计算方法可表示如下:(1)令  $h_0 = \Delta t$ ;(2)取  $t_i = t_{i-1} + h_{0i}$ ;(3)将结果带入式(8)和(9)中;(4)由 Rayleigh-Plesset 方程求得时刻的空泡半径。

### 2.2 几种数值解法的稳定性分析

Rayleigh-Plesset 方程是一个非线性微分方程,且没有解析解,不易比较判断各种数值方法的可靠性,因此采用下式来进行测试。

$$y = \tan x \quad (12)$$

式(12)在  $x = 90^\circ$  时具有奇异性,与原式性质相同,因此符合要求<sup>[8]</sup>。应用式(12)并利用 EXCEL 工具,得到的 4 种数值方法从  $\Delta x = 1^\circ$  开始的步长算法分析如图 1。

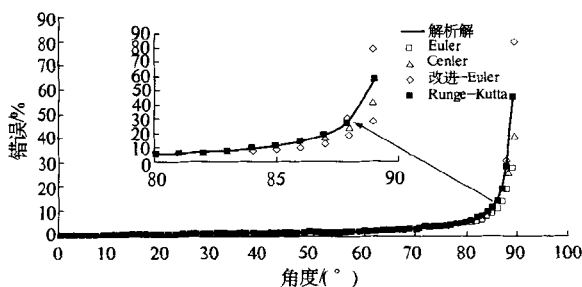


图 1 对比分析几种方程解的情况

Fig. 1 Comparison of solutions from different schemes with analytical solution

如图 1 所示,在  $x$  不接近  $90^\circ$  时,各种方法都能得到较为准确的结果,但在整个  $0^\circ \leq x \leq 90^\circ$  的范围中考虑的话,Runge-Kutta-Fehlberg 法效果最好。

4 种方法中只有 Runge-Kutta-Fehlberg 法可以估算误差。对比解析解可以看出 Runge-Kutta-Fehlberg 法的估算误差较为保守一些。

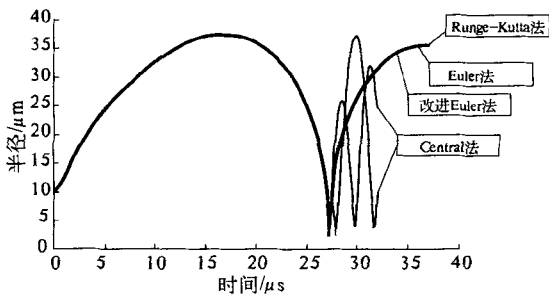
### 2.3 较小压力下各种解法解 Rayleigh-Plesset 方程

如表 2 所示,压力从 12 kPa 线性下降到最低值 -1 kPa,之后又恢复到 12 kPa。时间步长  $h = \Delta t = 2 \times 10^{-9}$  s, 18 500 步后,4 种方法的解如图 2。

表2 较小压力变化下的测试情况

Tab.2 Assumed pressure for testing numerical methods

$t/s$	0	$5.11 \times 10^{-6}$	$7.11 \times 10^{-6}$	$2.1 \times 10^{-5}$	$3.7 \times 10^{-5}$
$p_{\infty}/\text{kPa}$	12	-1	-1	12	12

图2 在固定时间步长为  $2 \times 10^{-9}$  s 时

不同方法求解 Rayleigh-Plesset 方程的情况

Fig.2 Solutions for Rayleigh-Plesset equation by different methods with constant time step of second

从图2中可以看出,除 Central 法在空泡溃灭再循环的时候产生严重的数值振荡之外,其他三种方法得到了稳定且几乎是相同的解。

#### 2.4 压力变化较大时解 Rayleigh-Plesset 方程

根据 K. BREMHORST 等人的研究可知,在较大压力变化的情况下,所需的时间步长非常小。因此,扩大压力的变化范围进行实验,使最高和最低压力分别为 120 kPa 和 -10 kPa,如表3所示。当时间步长为  $2 \times 10^{-9}$  s 时,即使在一个生长溃灭循环之内,4 种方法也都不能完成。

表3 扩大压力变化时的测试情况

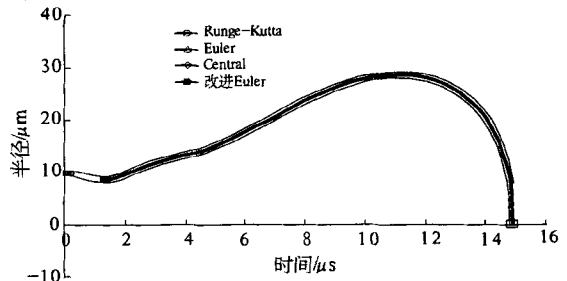
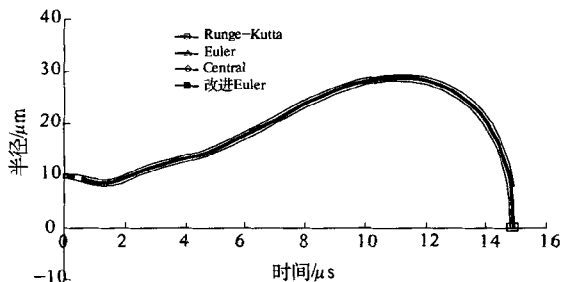
Tab.3 Enlarged pressure variation for testing numerical methods

$t/s$	0	$5.11 \times 10^{-6}$	$7.11 \times 10^{-6}$	$2.1 \times 10^{-5}$	$3.7 \times 10^{-5}$
$p_{\infty}/\text{kPa}$	120	-10	-10	120	120

为尽量完成至少一个循环,缩减时间步长至  $1 \times 10^{-9}$  s 再次计算,但从结果上看不出有明显的变化。这是因为当空泡即将溃灭时,时间步长与空泡半径达到最小值的变化率相比过大,所以除非大幅缩减时间步长,否则不会有明显的改观。

4 种方法在溃灭结束、开始第二次循环的时候都出现了振荡现象,没有给出合适的解。这表明,由于溃灭的最后阶段压力变化的速度和空泡半径的变化速度都很快,固定时间步长的方法解 Rayleigh-Plesset 方程需要一个极小的时间步长,而过小的步长将导致计算步数与计算时间成几何倍数增长,这种增长往往超过了现有计算机所能

承受的极限。因此,必须找到一种更为合理的算法,才能在压力变化比较大的情况下较好的解决 Rayleigh-Plesset 方程。

图3 固定时间步长为  $h = 2 \times 10^{-9}$  s 时的情况Fig.3 Solutions with constant time step of  $h = 2 \times 10^{-9}$  s for a larger pressure variation图4 固定时间步长为  $h = 1 \times 10^{-9}$  s 时的情况Fig.4 Solutions with constant time step of  $1 \times 10^{-9}$  s for a larger pressure variation

### 3 变步长法解 Rayleigh-Plesset 方程

#### 3.1 变步长法的基本算法

在满足前述解 Rayleigh-Plesset 方程各项假设的前提下,对于变步长法的计算方法可表示如下:

(1) 令  $h_0 = \Delta t$ ,  $h_i = h_{i-1} R_i / R_{i-1}$ ; (2) 取  $t_i = t_{i-1} + h_i$ ; (3) 将结果带入式(8)和式(9)中; (4) 由 Rayleigh-Plesset 方程求得  $t_i$  时刻的空泡半径  $R_i$ 。

#### 3.2 可变步长法及其在压力变化较大时的测试

Rayleigh-Plesset 方程的特点是可以描述空泡生长至溃灭的全过程,当空泡半径很小时,它的导数变得很大,因此需要非常小的时间步长。从上述计算情况来看,对于二阶 Rayleigh-Plesset 微分方程,选取的时间步长并不合适。

基于上述考虑,提出了一种时间步长随空泡半径变化速率  $R_i / R_{i-1}$  而自动调整的算法,配合一些简单的算法,如 Euler 法,来达到变步长解 Rayleigh-Plesset 方程的目的。图5显示了使用这种变步长法在压力变化较大时测得的结果,与从图2到图4的结果相比,这无疑是一个更为准确的结果。更重要的是,它有的时候并不会产生奇异点,

因此可以连续地表示一个循环结束到下一循环开始的情况. 使用这种变步长结合 Euler 法, 计算空泡 4 次生长溃灭循环仅需不到 1 500 步. 图 6 是空泡半径  $R$  随时间变化的情况. 图中显示, 空泡结束第一次循环, 完成溃灭并开始反弹的时间是  $t = 0.000\ 015\ \text{s}$ , 这与固定步长法测得的结果相同, 但固定步长法无法模拟溃灭结束并开始反弹的过程.

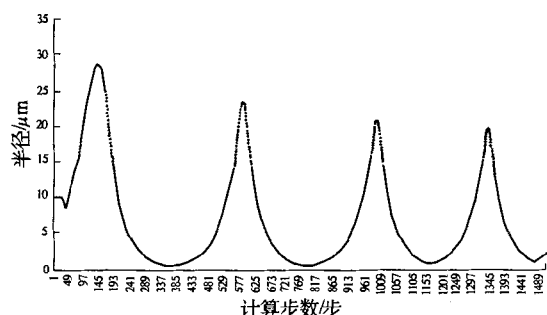


图 5 较大压力变化时变步长法的情况

Fig. 5 Solutions from the variable time step method for a larger pressure variation

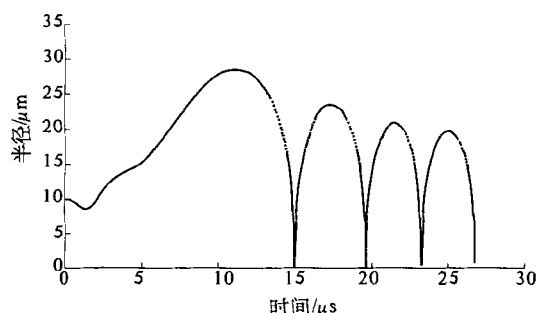


图 6 较大压力变化下由变步长法测得的空泡半径随时间变化的情况

Fig. 6 Time history of the bubble radius from the variable time step method for a larger pressure variation

### 3.3 变步长法与固定步长法的比较

为对比变步长法与固定步长法的计算效果, 使用固定步长法中较精确的 Runge-Kutta-Fehlberg 法与变步长法进行对比.

在较小压力变化的情况下, 分别采用变步长配合 Euler 法与 Runge-Kutta-Fehlberg 法对一个生长溃灭循环计算, 其中  $p_{\max} = 12\ \text{kPa}$ ,  $p_{\min} = -1\ \text{kPa}$ . 结果见图 7.

如图所示, 两种方法的结果没有显著的差异, 均可模拟在压力变化不大情况下溃灭和反弹的过程. 然而在迭代步数上却有很大差异. Runge-Kutta-Fehlberg 法共使用 16 000 步, 而变步长配合 Euler 法仅使用 800 步就得到了正确的结果.

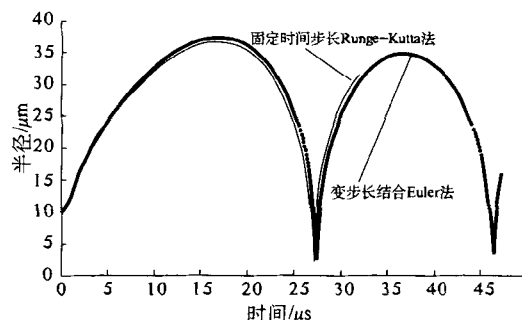


图 7 固定 Runge-Kutta 法与变步长配合 Euler 法在较低压力变化下的比较

Fig. 7 Comparison of solutions from the constant time step Runge-Kutta method and the variable time step on Euler method under the smaller pressure variation

在变步长法中, 最大和最小的时间增量分别为  $10^{-7}\ \text{s}$  和  $10^{-17}\ \text{s}$ . 若使用固定步长法, 则必须采用最小的步长以达到相同的精度, 而采用最小步长的话, 则共需  $10^{12}$  步, 这是目前的计算机技术难以负担的. 当压力变化较大的时候, 这一优点更加凸显, 此时所需的最小步长会进一步缩小, 这种情况下用固定步长法是不可能完成计算的.

## 4 结论

在几种用于求解 Rayleigh-Plesset 方程的固定步长方法中, Runge-Kutta-Fehlberg 法效果最好, 可以使用相对较长的步长得准确的结果. 在压力变化较小的时候, Euler 法、改进 Euler 法也可以用于求解 Rayleigh-Plesset 方程, 但当压力变化增大的时候, 固定步长法难以得到较准确的解. 为解决这个难题, 提出了变步长法, 即时间步长随空泡半径改变速率  $\frac{R_i}{R_{i-1}}$  而自动修正的方法.

与传统的固定步长法相比, 变步长法具有以下几个优点:

- (1) 变步长法可以模拟完整的生长溃灭循环过程, 而不会在两次循环间出现奇异点;
- (2) 变步长法适用于较大压力变化的情况, 可以得到较准确的结果;
- (3) 变步长法可以在保证精度的情况下, 显著降低计算步数, 本算例中仅为固定步长法的  $1/20$ .

因此, 变步长法更适合于解 Rayleigh-Plesset 方程, 在节约系统资源, 保证结果精度等方面都有较好表现, 该方法为研究 Rayleigh-Plesset 方程提供新的思路和算法.

## 参考文献:

- [1] RAYLEIGH L. On the pressure developed in a liquid during collapse of a spherical cavity [J]. *Philosophical Magazine*, 1917(34): 94 - 98.
- [2] 卢义玉, 葛兆龙, 李晓红. 空化空泡发育和溃灭过程的数值分析[J]. *中国矿业大学学报*, 2009, 38(4): 582 - 594.
- [3] PLESSET M S, CHAPMAN R B. Collapse of an initially spherical vapour cavity in the neighbourhood of a solid boundary [J]. *Journal of Fluid Mech*, 1971(47): 83 - 290.
- [4] SHIMA A. Mechanism of impact pressure generation from spark generated bubble collapse near a wall [J]. *AIAA J*, 1983(21): 55 - 59.
- [5] PLESSET M S. The dynamics of cavitation bubbles [J]. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 1949(16): 228 - 231.
- [6] 王鹏. 随机常微分方程数值分析中的若干方法 [D]. 长春: 吉林大学, 2008.
- [7] 郭晓梅. 常微分方程的数值解法[J]. *网络财富*, 2009, (4): 132.
- [8] YAN Yu-bin. Smoothing a properties and approximation of time derivatives for parabolic equations; variable time steps [J]. *BIT Numerical Mathematics*, 2003, 43(1): 647 - 669.
- [9] PLESSET M S, PROSPERETTI A. Bubble dynamics and cavitation [J]. *Annual Review Fluid Mech*, 1977(9): 145 - 185.
- [10] FUJIKAWA S, AKAMATSU T. Effects of the non-equilibrium condensation of vapour on the pressure wave produces by the collapse of a bubble in a liquid [J]. *Journal of Fluid Mech*, 1980, 97(6): 481 - 512.
- [11] QIN Z, BREMHORST K, ALEHOSSEIN H. Simulation of cavitation bubbles in a convergent-divergent nozzle water jet [J]. *J. Fluid Mech*, 2007, 573(4): 1 - 25.

## Numerical Analysis on Collapse of Cavitation Bubble in a Water Jet Flow

YANG Bo-kai, LU Yi-yu, YANG Xiao-feng, FENG Ming-tao, ZHANG Sai

(College of Resources & Environmental Science, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

**Abstract:** Calculation on cavitation bubble growth and collapse is key to study the cavitating water jet. After the analysis of different numerical methods to Rayleigh-Plesset equation, a numerical method with variable-steps is developed that can overcome the weak point of constant time step method to solve the Rayleigh-Plesset equation. And it also learned that a constant time step is not appropriate for solving the Rayleigh-Plesset equation when dealing with large pressure variations or under the smaller pressure variation. The variable time step method can get a better result. What more, it is only after the variable time step method can be predicted without singularity. So the variable time step method is better than the constant time step method in saving computational and keeping accuracy. This paper provides a new idea to solve Rayleigh-Plesset equation.

**Key words:** bubble; Rayleigh-Plesset equation; constant time step; variable time step