

移动机器人路径规划蚁群算法及其收敛性分析

刘广瑞¹, 刘 军¹, 孔令云²

(1. 郑州大学 机械工程学院, 河南 郑州 450001; 2. 黄河科技学院 工学院, 河南 郑州 450005)

摘 要: 移动机器人的路径规划是按照某一性能指标搜索一条从起点到目标点的最优或次最优的无碰撞路径. 将蚁群算法用于移动机器人的路径规划, 阐述了移动机器人路径规划蚁群算法的基本原理, 指出蚁群算法的迭代过程是马尔科夫过程, 分析了蚁群算法的收敛性, 提出了改善蚁群算法收敛性的途径. 仿真结果表明: 该算法能够在较短的时间内规划出较优的路径, 且该算法有效可行.

关键词: 移动机器人; 路径规划; 蚁群算法; 收敛性

中图分类号: TP24

文献标志码: A

doi:10.3969/j.issn.1671-6833.2012.02.006

0 引言

移动机器人的路径规划是指搜索一条从起点到终点的最优或次最优的无碰撞路径使某性能指标最优或次优. 路径规划可分为: 全局路径规划和局部路径规划. 其中, 全局路径规划的环境信息是完全已知的, 局部路径规划的环境信息是不完整或未知的.

蚁群优化算法的论述和研究较多^[1-10], 蚁群算法收敛性分析也有不少^[5-6,9], 但是把蚁群优化算法看做马尔科夫过程进行收敛性分析的并不多见. 笔者的创新之处在于: 将蚁群算法用于移动机器人的路径规划, 将蚁群算法的迭代过程视为马尔科夫过程并进行了分析, 在此基础上分析该算法的收敛性并提出了改善算法收敛性的途径.

1 路径规划蚁群算法的基本原理

蚁群优化(ACO)是蚁群算法的核心, 其思路为: 蚂蚁的个体行为非常简单, 而它们的群体行为却很复杂; 一群蚂蚁容易找到从蚁巢到食物源的最短路径, 而单个蚂蚁则难以找到最短路径; 蚁群能够适应环境的变化, 当在它们的移动路线上突然出现障碍物时, 它们能够很快重新找到最短路径.

1.1 环境模型的建立

采用栅格法建立移动机器人的环境模型, 建

模时首先作如下假设:

(1) 机器人的工作空间为一个二维结构化空间, 简记为 RS; 障碍物位置、大小已知且在机器人运动过程中均不发生变化.

(2) 机器人的运动空间中分布着有限个已知的、大小不同的障碍物, 障碍物可以由栅格描述, 忽略障碍物的高度信息.

(3) 假定机器人运动在二维平面上的凸多边形有限区域内.

该区域内分布着有限个大小不同的障碍物, 在该区域内建立直角坐标系. 假设机器人运动的步长为 R , 并且 x 轴和 y 轴均以 R 为单位来划分栅格. 则每行的栅格数为: $N_x = x_{\max}/R$; 每列的栅格数为: $N_y = y_{\max}/R$.

如果区域为不规则形状, 可在边界处加上障碍栅格, 补其为正方形或者长方形. 补充的障碍物栅格若不满一个, 以一个计算. 栅格的位置可以用坐标或序列号描述, 序列号与坐标是一一对应的, 图 1 表示了栅格坐标与序列号之间的关系.

1.2 栅格标识方法

(1) 直角坐标法. 建立如图 1 所示的直角坐标系. x 轴水平向右为其正方向, y 轴竖直向下为其正方向, 坐标原点在栅格阵左上角. 用直角坐标 (x, y) 来表示任意栅格的位置.

(2) 序号法. 按照由左到右, 由上到下的顺序, 从栅格阵左上角第一个栅格开始, 赋予每一个

收稿日期: 2011-10-01; 修订日期: 2011-12-15

基金项目: 国家公益性行业(农业)科研专项(Nyhyzx07-005-25)

作者简介: 刘广瑞(1966-), 男, 河南延津人, 郑州大学副教授, 博士, 主要从事自动控制系统、机器人、数学化液压等方面的研究工作, E-mail: lgrui2006@163.com.

栅格一个序号 n (从 0 开始计), 则序号 n 与栅格块一一对应, 如图 1 所示。

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	x
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
2	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
3										
4										
5										
6										
7										
8	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
y										

图 1 栅格坐标与序号的关系

Fig. 1 Relationship between grid coordinate and serial number

两种表示方法都能唯一地表示一个栅格, 一个栅格的直角坐标和序号之间是一一对应的。

2 路径规划蚁群算法的收敛性分析

2.1 蚁群算法的迭代过程是马尔科夫过程

马尔科夫过程是俄国数学家 A. A. 马尔科夫于 1907 年首次提出的, 是一类将来发生的事情与过去发生的事情无关的随机过程^[1]。这种在已知“现在”的条件下, “将来”与“过去”独立的特性叫做马尔科夫性。从蚁群算法的概念可知蚁群算法的迭代过程是一个典型的随机过程。设蚁群在 $t=0, 1, 2, \dots, n$ 时, 对应的状态分别为: $E_0, E_1, E_2, \dots, E_n$ 。

若 $t=n$ 时系统的状态已知, 那么由蚁群算法的迭代过程可知: 在 $t=n$ 时以前的状态对 $t=n$ 以后的状态没有任何影响, 即在“现在状态”已知的情况下, “将来状态”与“过去状态”相互独立, 这种过程就是马尔科夫性。

2.2 蚁群算法的收敛性分析

预设 A, B 两点之间有 m 条路径 $AC_1B, AC_2B, AC_3B, \dots, AC_mB$, 如图 2 所示。各条路径长度依次设为 $d_1, d_2, d_3, \dots, d_m$, 不失一般性, 假设 $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \dots \leq d_m$ 。在算法预定的环境中有 n 只蚂蚁在 A, B 之间往返爬行, 根据蚁群算法的特性可知, 随着时间的推移, 大多数蚂蚁应在路径 AC_1B 上, 此时我们就认为从出发点 A 到目标点 B 之间的最短路径是 AC_1B , 蚁群算法以接近于概率 1 的趋势寻找最短路径。

以 $q_{i,k}$ 表示蚂蚁爬行第 k 趟后留在路径 AC_iB 上的平均信息素, $p_{i,k}$ 表示蚂蚁爬行第 k 趟后选择路径 AC_iB 的平均概率。假设各条路径上的初始

信息量相等, 均为 C 。

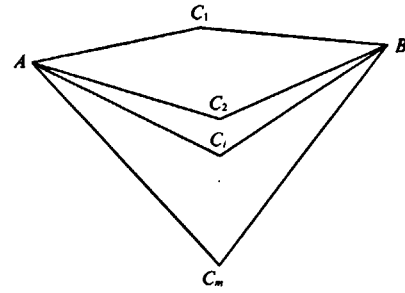


图 2 最短路问题

Fig. 2 Shortest route problem

定理 1 若 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, 则 $q_{1,k} \geq q_{2,k} \geq \dots \geq q_{m,k}, p_{1,k} \geq p_{2,k} \geq \dots \geq p_{m,k}, k=0, 1, 2, \dots, n$ 。

证明: 当 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 时, 则

$$p_{i,0} = \frac{C^\alpha}{d_i^\beta} / \sum_{j=1}^m \frac{C^\alpha}{d_j^\beta}, \quad (1)$$

由 $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_m$, 可得: $p_{1,0} \geq p_{2,0} \geq \dots \geq p_{m,0}; q_{i,0} = \rho C + np_{i,0} \frac{Q}{d}$, 从而 $q_{1,0} \geq q_{2,0} \geq \dots \geq q_{m,0}$;

$$p_{i,1} = \frac{q_{i,0}^\alpha}{d_i^\beta} / \sum_{j=1}^m \frac{q_{j,0}^\alpha}{d_j^\beta}, p_{1,1} \geq p_{2,1} \geq \dots \geq p_{m,1}.$$

由上述推导过程可得

$$\begin{cases} q_{i,k} = \rho q_{i,k-1} + np_{i,k-1} \frac{Q}{d_i}; \\ p_{i,k} = \frac{q_{i,k-1}^\alpha}{d_i^\beta} / \sum_{j=1}^m \frac{q_{j,k-1}^\alpha}{d_j^\beta}. \end{cases} \quad (3)$$

式中: ρ 为信息素挥发系数。

由数学归纳法可得: 当 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 时, $q_{1,k} \geq q_{2,k} \geq \dots \geq q_{m,k}, p_{1,k} \geq p_{2,k} \geq \dots \geq p_{m,k}$ 。

由上述证明的过程可知: 一个循环迭代结束后, 路径 AC_1B 上的传递介质浓度最高, 因此路径 AC_1B 将会被更多蚂蚁以较大概率选择。

定理 2 若 $\alpha \geq 1, \beta \geq 0$ 时, $\frac{q_{j,k}}{q_{1,k}} - \frac{q_{j,k-1}}{q_{1,k-1}} < 0, k=1, 2, \dots, n, j=2, 3, \dots, m$ 。

$$\begin{aligned} \text{证明: } \frac{q_{j,k}}{q_{1,k}} - \frac{q_{j,k-1}}{q_{1,k-1}} &= \frac{\rho q_{j,k-1} + np_{j,k-1} \frac{Q}{d_j}}{\rho q_{1,k-1} + np_{1,k-1} \frac{Q}{d_1}} - \frac{q_{j,k-1}}{q_{1,k-1}} \\ &= \frac{nQ(\frac{p_{j,k-1}q_{1,k-1}}{d_j} - \frac{p_{1,k-1}q_{j,k-1}}{d_1})}{(\rho q_{1,k-1} + np_{1,k-1} \frac{Q}{d})q_{1,k-1}}. \end{aligned} \quad (4)$$

若需 $\frac{q_{j,k}}{q_{1,k}} - \frac{q_{j,k-1}}{q_{1,k-1}} < 0$, 则 $\frac{p_{j,k-1}q_{1,k-1}}{d_j} < \frac{p_{1,k-1}q_{j,k-1}}{d_1}$ 。

把 $p_{j,k-1}$ 与 $p_{1,k-1}$ 的表达式代到以上公式:

$$\frac{q_{j,k-1}^{\alpha} q_{1,k-1}}{d_1^{\beta+1}} < \frac{q_{1,k-1}^{\alpha} q_{j,k-1}}{d_1^{\beta+1}}; \text{简化得到: } \frac{q_{j,k-1}^{\alpha-1}}{d_j^{\beta+1}} < \frac{q_{1,k-1}^{\alpha-1}}{d_1^{\beta+1}}.$$

因 $q_{j,k-1} < q_{1,k-1}$, $d_j > d_1$, 当 $\alpha \geq 1, \beta \geq 0$ 时, 式子 $\frac{q_{j,k-1}^{\alpha-1}}{d_j^{\beta+1}} < \frac{q_{1,k-1}^{\alpha-1}}{d_1^{\beta+1}}$ 成立. 那么, $\frac{q_{j,k}}{q_{1,k}} - \frac{q_{j,k-1}}{q_{1,k-1}} < 0, k=1, 2, \dots, n, j=2, 3, \dots, m$.

上述定理的证明从一定程度上说明 $\frac{q_{j,k}}{q_{1,k}}$ 以时间消耗渐趋于淹没.

定理 3 若 $\alpha \geq 1, \beta \geq 1$, 则 $p_{1,k} > p_{1,k-1}, k=1, 2, \dots$.

证明: 由于

$$p_{1,k} = \frac{\frac{q_{1,k}^{\alpha}}{d_1^{\beta}}}{\sum_{j=1}^m \frac{q_{j,k}^{\alpha}}{d_j^{\beta}}} = (1 + (\frac{d_1}{d_2})^{\beta} (\frac{q_{2,k}}{q_{1,k}})^{\alpha} + (\frac{d_1}{d_3})^{\beta} (\frac{q_{3,k}}{q_{1,k}})^{\alpha} + \dots + (\frac{d_1}{d_m})^{\beta} (\frac{q_{m,k}}{q_{1,k}})^{\alpha})^{-1};$$

$$\frac{1}{p_{1,k}} - \frac{1}{p_{1,k-1}} = (\frac{d_1}{d_2})^{\beta} [(\frac{q_{2,k}}{q_{1,k}})^{\alpha} - (\frac{q_{2,k-1}}{q_{1,k-1}})^{\alpha}] + (\frac{d_1}{d_3})^{\beta} [(\frac{q_{3,k}}{q_{1,k}})^{\alpha} - (\frac{q_{3,k-1}}{q_{1,k-1}})^{\alpha}] + \dots + (\frac{d_1}{d_m})^{\beta} [(\frac{q_{m,k}}{q_{1,k}})^{\alpha} - (\frac{q_{m,k-1}}{q_{1,k-1}})^{\alpha}].$$

由定理 2 的证明可得: $\frac{q_{j,k}}{q_{1,k}} < \frac{q_{j,k-1}}{q_{1,k-1}}$; 那么, $\frac{1}{p_{1,k}} - \frac{1}{p_{1,k-1}} < 0$, 亦即: $p_{1,k} > p_{1,k-1}$.

定理 4 若 $\alpha \geq 1, \beta \geq 1$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{1,k} = 1$.

证明: 根据上述证明过程可得, 若 $\alpha \geq 1, \beta \geq 1$ 时, 那么 $p_{1,k} > p_{1,k-1}$, 随机数列 $p_{1,k}$ 单调递增, 由高等数学极限理论知识易知“单调有界数列必有极限, 且收敛到其上界”可得, 若 $k \rightarrow \infty$ 满足的条件下, $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{1,k} = 1$.

以上定理 4 为例, $\alpha \geq 1, \beta \geq 0$ 并非随机序列 $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{1,k} = 1$ 的充分必要条件, 仅仅是充分条件. 定理 4 表明: 伴随算法寻优过程的不断进行, 蚂蚁越来越倾向于以概率 1 选择路径 AC_1B .

3 改善蚁群算法收敛性的途径

蚁群算法的收敛性与信息素更新机制及参数匹配有很大的联系, 可以从下述几方面改善算法的收敛性.

(1) 两个指数 α, β 的选取至关重要, 应选在

合适的范围内; $\alpha \geq 1, \beta \geq 0$, 选择最优路径的概率才会趋近于 1.

(2) 由定理 1, 2 的证明过程可知, 信息素挥发系数 ρ 对算法的收敛速度有较大的影响, 应重视该参数的选择. ρ 愈小, 过去信息挥发的愈快, 算法收敛愈慢; ρ 愈大, 挥发的愈慢, 算法收敛愈快. ρ 应在 0 和 1 之间选择.

4 仿真计算

如图 2 所示, 假设 A、B 之间有 4 条路径 $AC_1B, AC_2B, AC_3B, AC_4B$, 路径长度分别为 1, 1.05, 1.1, 1.15, 蚂蚁数目 $n=100$, 信息量 $C=30$, $Q=1, \rho=0.6$. 当 $\alpha=2, \beta=2$ 时, 算法收敛很快, 选择概率的结果如图 3 所示; 当 $\alpha=0.8, \beta=1$ 算法运行了 200 次后还没有收敛, 信息素变化规律结果如图 4 所示.

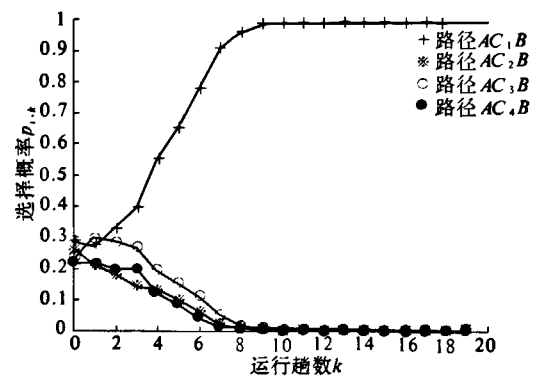


图 3 当 $\alpha=2, \beta=2$ 时蚁群算法选择概率变化规律
Fig.3 Selection probability varying rules of ant colony algorithm when $\alpha=2, \beta=2$

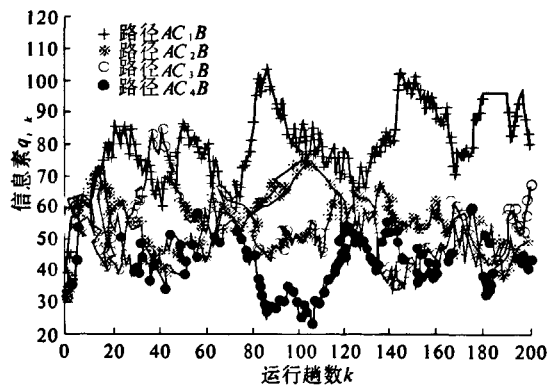


图 4 当 $\alpha=0.8, \beta=1$ 时蚁群算法信息素变化规律
Fig.4 pheromone varying rules of ant colony algorithm when $\alpha=0.8, \beta=1$

当 $\alpha=1.1, \beta=-0.9$ 时, 选择概率的结果如图 5 所示, 虽然收敛, 但不一定收敛到最短路径, 如图 3 所示就收敛到路径 AC_2B 中, 由上述选择概率的收敛图可以看出: $\alpha \geq 1, \beta \geq 0$ 是算法收敛

的较好组合。

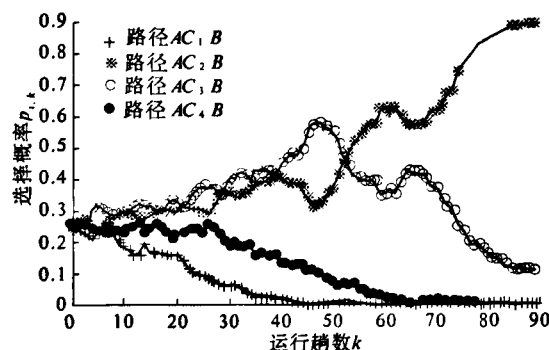


图5 当 $\alpha=1.1, \beta=-0.9$ 时蚁群算法
选择概率变化规律

Fig.5 Selection probability varying rules of ant colony
algorithm when $\alpha=1.1, \beta=-0.9$

5 结论

为了寻找机器人从起点到终点的最优或次最优路径,笔者将蚁群算法应用于移动机器人的路径规划之中,阐述了蚁群算法的基本原理,分析了路径规划蚁群算法的收敛性,概括性地指出了改善蚁群算法收敛性的途径,并以最短路问题为例在设定参数下做了仿真计算.理论分析和仿真计算的结果均表明:指数在 $\alpha \geq 1, \beta \geq 0$ 的范围内时,算法有较好的收敛性.因此我们认为,指数 α 、 β 以及信息挥发系数 ρ 对算法的收敛性影响较大,应仔细选择。

参考文献:

- [1] 马良,朱刚,宁爱兵. 蚁群优化算法[M]. 北京:科学出版社,2008:15-150.
- [2] 高尚,杨靖宇. 群智能算法及其应用[M]. 北京:中国水利水电出版社,2006.
- [3] 高尚. 解旅行商问题的混沌蚁群算法[J]. 系统工程理论与实践,2005,25(9):100-104.
- [4] 段海滨. 蚁群算法原理及其应用[M]. 北京:科学出版社,2005.
- [5] 冯远静,冯祖仁,彭勤科. 一类自适应蚁群算法及其收敛性分析[J]. 控制理论与应用,2005,22(5):713-717.
- [6] 高尚,杨靖宇. 最短路的蚁群算法收敛性分析[J]. 科学技术与工程,2006,6(3):273-277.
- [7] COLONNI A. Heuristics from nature for hard combinatorial optimization problems[J]. Int Trans in Opnl Res,1996,3(1):1-21.
- [8] PILOT M. General local search methods[J]. European J of Opnl Res,1996,92(3):493-511.
- [9] 赵霞,田恩刚. 蚁群系统及其收敛性证明[J]. 计算机工程与应用,2007,43(5):67-70.
- [10] KELLER Y, AVERBUCH A. Fast motion estimation using bidirectional gradient methods[J]. IEEE Trans on Image Processing,2004,13(8):1042-1054.

Ant Colony Algorithm of Path Planning for Robot and Its Convergence Analysis

LIU Guang-rui¹, LIU Jun¹, KONG Ling-yun²

(1. School of Mechanical Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China; 2. School of Industry, Huanghe Institute of Science and Technology, Zhengzhou 450005, China)

Abstract: Path planning of mobile robot is a hunting for optimal or suboptimal collisionless path from starting point to destination point according to one type of performance index. The ant colony algorithm is applied to the path planning of mobile robot, the principle of ant colony algorithm of path planning for mobile robot is represented in the first place, then it is pointed out that the interaction course of ant colony algorithm is the Markov process, the convergence of ant colony algorithm is analyzed, and the improvement method of convergence for ant colony algorithm is put forward. The simulation results show that: the algorithm in a short period of time to plan a better path, and effectiveness and feasibility of the algorithm is certified by simulation analysis.

Key words: mobile robot; path planning; ant colony algorithm; convergence