

随机噪声激励下的一类相对转动系统的响应

王 坤, 吴海花, 仲淑娟

(燕山大学 理学院, 河北 秦皇岛 066004)

摘 要: 探讨一类相对转动非线性动力系统在随机噪声作用下的响应问题, 将多尺度法运用到含有随机扰动的相对转动系统中, 利用线性化法、矩方法讨论了该系统的阻尼项、随机项对系统的二阶矩的影响并应用 Routh-Harwitz 准则给出了系统解的稳定性条件, 理论分析了较小的随机强度对系统解的稳定性影响不大, 系统的二阶矩随着阻尼项的增大而减小, 随着随机强度的增大而增大, 最后得出理论分析与数值模拟是一致的。

关键词: 相对转动系统; 多尺度法; 线性化法; 矩方法; 稳定性

中图分类号: O324

文献标志码: A

0 引言

目前, 转动运动与转动力学已成为重要的研究内容. 自以色列物理学家 Carmeli 于 1985 年提出了转动相对论力学理论, 1996 年罗少凯^[1-2]建立了转动相对论分析力学理论以来, 转动相对论系统的研究已受到学术界的广泛重视. 近年来, 有关相对转动系统的研究报道很多, 基于相对性原理, 给出了一类黏性系数下的相对转动动力学系统的稳定性及近似解^[3-4], 对一类非线性相对转动周期系统进行了平衡稳定性分析^[5-6], 研究了一类相对转动非线性动力系统的 Hopf 分岔的非线性反馈控制及混沌运动和周期解^[7-9].

一个动力学系统的动态过程中发生的作用可能是外界非可控的干扰引起的或是系统的参数的非可控的变化造成的, 具有复杂动力学行为的相对转动动力学系统也不例外, 噪声必然会对转动系统产生一定的影响, 考虑到这一点有必要建立新的物理模型, 研究其动态过程的特点. 而对这方面的研究还未见报道. 笔者基于随机系统理论和文献^[10-13], 研究相对转动非线性系统在随机噪声激励下的响应问题, 尝试把多尺度法运用到该系统上, 运用线性化法、矩方法^[14]给出了系统的伊藤微分方程并讨论了系统的阻尼项和随机项对系统相应的影响.

1 模型的提出

考虑受随机噪声激励的相对转动非线性系统的动力学方程为:

$$\ddot{\theta}_\Delta + b\dot{\theta}_\Delta - c\dot{\theta}_\Delta^3 + d\dot{\theta}_\Delta^3 + e\dot{\theta}_\Delta^3 = \xi(t) \quad (1)$$

式中: $\theta_\Delta = \theta_2 - \theta_1$, $\xi(t)$ 为随机噪声, 且 $\xi(t) = h \cos(\Omega t + \gamma w(t))$, 激励幅值 $h > 0$, Ω 为激励的中心频率, $w(t)$ 为标准的 wiener 过程, γ 为随机噪声强度.

2 多尺度法

近年来, 多尺度法^[15]在随机系统中广泛应用, 笔者将此法应用于含随机噪声的相对转动非线性系统中. 设

$$b = \omega_0^2, -c = \varepsilon a_1, d = \varepsilon a_2, e = \varepsilon b_1;$$

$$\xi(t) = h \cos(\Omega t + \gamma w(t));$$

系统(1)化为

$$\ddot{\theta}_\Delta + \omega_0^2 \theta_\Delta + \varepsilon(a_1 \dot{\theta}_\Delta + a_2 \dot{\theta}_\Delta^3 + b_1 \dot{\theta}_\Delta^3) = \varepsilon \xi(t) \quad (2)$$

式中: ω_0 为固有频率; ε 为小参数; a_1, a_2 为阻尼项.

引入频率调制参数 σ , 令

$$\Omega = \omega_0 + \varepsilon \sigma$$

设系统(2)具有如下形式的解

$$\theta_\Delta(t, \varepsilon) = \theta_0(T_0, T_1) + \varepsilon \theta_1(T_0, T_1) + \dots \quad (3)$$

收稿日期: 2011-03-14; 修订日期: 2011-05-30

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目(60934003)

作者简介: 王坤(1960-), 男, 河北秦皇岛人, 燕山大学教授, 博士, 主要研究方向为非线性系统理论及应用, E-mail: wankun8992@yahoo.com.cn.

式中: $T_0 = t$, $T_1 = \varepsilon t$ 分别为快慢尺度, 利用多尺度法得

$$D_0^2 \theta_0 + \omega_0^2 \theta_0 = 0 \quad (4)$$

$$D_0^2 \theta_1 + \omega_0^2 \theta_1 = -2D_0 D_1 \theta_0 - a_1 D_0 \theta_0 - a_2 (D_0 \theta_0)^3 - b_1 \theta_0^3 + h \cos(\Omega t + \gamma w(t)) \quad (5)$$

式中: D_i 为偏微分算子, $D_i = \frac{\partial}{\partial T_i}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$

设式(4)的解为

$$\theta_0 = A(T_1) \exp(i\omega_0 T_0) + \bar{A}(T_1) \exp(-i\omega_0 T_0) \quad (6)$$

将式(6)代入式(5)并消除久期项得

$$2\omega_0 \dot{A}(T_1) + a_1 \omega_0 A(T_1) - 3a_2 \omega_0^3 A^2 \bar{A} + 3b_1 A^2 \bar{A} - \frac{1}{2} h \exp(i\sigma T_1 + i w(t)) = 0 \quad (7)$$

引入 $A = a \exp(i\phi)$, 其中 a 为幅值. 将其代入复方程(7)并分离实、虚部得

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{3}{2} a_2 \omega_0^2 a^3 - \frac{a_1}{2} a + \frac{h}{4\omega_0} \sin(\sigma T_1 + \gamma w - \phi) \\ a \dot{\phi} = \frac{3}{2\omega_0} b_1 a^3 - \frac{h}{4\omega_0} \cos(\sigma T_1 + \gamma w - \phi) \end{cases} \quad (8)$$

由式(8)可解出方程式(2)的首次近似解为

$$\theta = a \cos(\Omega t - \eta) + o(\varepsilon).$$

其中, $\eta = \sigma T_1 + \gamma w(t) - \phi$.

3 系统解的稳定性

首先讨论当 $\gamma = 0$ 时系统(8)的稳态响应, 当 $\dot{a} = 0, a\dot{\phi} = 0$ 时有稳态解, 由式(8)可得系统(2)的频响方程为

$$\left(\frac{3}{2} a_2 \omega_0^2 a^3 - \frac{a_1}{2} a \right)^2 + \left(a\sigma - \frac{3}{2\omega_0} b_1 a^3 \right)^2 = \frac{h^2}{16\omega_0^2} \quad (9)$$

变换 $\eta = \sigma T_1 + \gamma w(t) - \phi$, 将式(8)可改写为

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{3}{2} a_2 \omega_0^2 a^3 - \frac{a_1}{2} a + \frac{h}{4\omega_0} \sin \eta \\ a \dot{\eta} = a\sigma + a\gamma \dot{w} - \frac{3}{2\omega_0} b_1 a^3 + \frac{h}{4\omega_0} \cos \eta \end{cases} \quad (10)$$

由于 γ 为小参数, 可以令

$$\begin{cases} a = a_0 + a_1 \\ \eta = \eta_0 + \eta_1 \end{cases} \quad (11)$$

式中: a_1, η_1 为摄动项, a_0, η_0 可由式(9)给出. 将式(11)代入式(8)并忽略非线性项, 可得如下的线性化方程

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{\eta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{9}{2} a_2 \omega_0^2 - \frac{a_1}{2} \right) & -(\sigma - \frac{3}{2\omega_0} b_1) \\ (\sigma - \frac{9}{2\omega_0} b_1) & \left(\frac{3}{2} a_2 \omega_0^2 - \frac{a_1}{2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \eta_1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

式(12)的系数矩阵所对应的特征方程为

$$\lambda^2 + B_1 \lambda + B_2 = 0 \quad (13)$$

其中: $B_1 = (a_1 - 6a_2 \omega_0^2)$;

$$B_2 = \left(\frac{9}{2} a_2 \omega_0^2 - \frac{a_1}{2} \right) \left(\frac{3}{2} a_2 \omega_0^2 - \frac{a_1}{2} \right) + \left(\sigma - \frac{3}{2\omega_0} b_1 \right) \left(\sigma - \frac{9}{2\omega_0} b_1 \right).$$

由稳定性理论知式(8)稳态解稳定的充分必要条件为

$$B_1 > 0, B_2 > 0 \quad (14)$$

下面讨论 $\gamma \neq 0$ 时式(8)的稳态响应. 将式(11)代入式(10)并忽略非线性项, 可得在点 (a_0, η_0) 处的 Ito 微分方程

$$\begin{cases} da_1 = \left(\left(\frac{9}{2} a_2 \omega_0^2 - \frac{a_1}{2} \right) a_1 - \left(\sigma - \frac{3}{2\omega_0} b_1 \right) \eta_1 \right) dT_1 \\ d\eta_1 = \left(\left(\sigma - \frac{9}{2\omega_0} b_1 \right) a_1 + \left(\frac{3}{2} a_2 \omega_0^2 - \frac{a_1}{2} \right) \eta_1 \right) dT_1 + \gamma dw(T_1) \end{cases} \quad (15)$$

若令 $A = \frac{3a_2 \omega_0^2 - a_1}{2}$, $B = \frac{3b_1}{2\omega_0}$;

用矩方法^[14]可得 a_1, η_1 的二阶矩所满足的方程为

$$\begin{cases} \frac{dEa_1^2}{dT_1} = 2(3A + a_1)Ea_1^2 - 2(\sigma - B)Ea_1 \eta_1 \\ \frac{dEa_1 \eta_1}{dT_1} = (4A + a_1)Ea_1 \eta_1 - (\sigma - B)E\eta_1^2 \\ \quad + (\sigma - 3B)Ea_1^2 \\ \frac{dE\eta_1^2}{dT_1} = 2(\sigma - 3B)Ea_1 \eta_1 + 2AE\eta_1^2 + \gamma^2 \end{cases} \quad (16)$$

对于一、二阶稳态解所需满足的条件为

$$\begin{cases} \frac{dEa_1}{dT_1} = \frac{dE\eta_1}{dT_1} = 0 \\ \frac{dEa_1^2}{dT_1} = \frac{dEa_1 \eta_1}{dT_1} = \frac{dE\eta_1^2}{dT_1} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

则可得系统的一、二阶稳态矩为

$$\begin{cases} Ea_1 = E\eta_1 = 0 \\ Ea_1^2 = \frac{-(B - \sigma)^2}{(4A + a_1)[(\sigma - 3B)(\sigma - B) + A(3A + a_1)]} \frac{\gamma^2}{2} \\ Ea_1 \eta_1 = \frac{(3A + a_1)(B - \sigma)}{(4A + a_1)[(\sigma - 3B)(\sigma - B) + A(3A + a_1)]} \frac{\gamma^2}{2} \\ E\eta_1^2 = \frac{-[(\sigma - 3B)(\sigma - B) + (4A + a_1)(3A + a_1)]}{(4A + a_1)[(\sigma - 3B)(\sigma - B) + A(3A + a_1)]} \frac{\gamma^2}{2} \end{cases} \quad (18)$$

方程(16)的系数矩阵所对应的特征方程为

$$\lambda^3 + A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda + A_3 = 0 \quad (19)$$

根据 Routh-Hurwitz 准则,由方程(16)可得二阶矩稳定的充分必要条件是

$$A_1 > 0; A_1 A_2 - A_3 > 0; A_3 > 0 \quad (20)$$

即 $B_1 > 0, B_2 > 0$.

其中, $A_1 = -3(4A + a_1)$;

$$A_2 = 44A^2 + 20a_1A + 2a_1^2 + 4(\sigma - B)(\sigma - 3B);$$

$$A_3 = -4(4A + a_1)[A(3A + a_1) + (\sigma - B)(\sigma - 3B)].$$

从式(18)可得系统响应幅值 a 的一、二阶矩分别为

$$\begin{cases} Ea = a_0 + Ea_* = a_0 \\ Ea^2 = E(a_0 + a_*)^2 = a_0^2 + Ea_*^2 \end{cases} \quad (21)$$

4 数值模拟

分别取参数 $A = -0.8, B = 3/2, a_1 = 1.2, \sigma = 1.0$, 在 MATLAB 下运行可以得到二阶矩 Ea^2 关于随机强度 γ 的变化曲线图, 如图 1 所示; 取参数 $A = -1.0, B = 1.0, \gamma = 1.0, \sigma = 2.0$ 可得到二阶矩 Ea^2 关于阻尼项 a_1 的变化曲线图, 如图 2 所示.

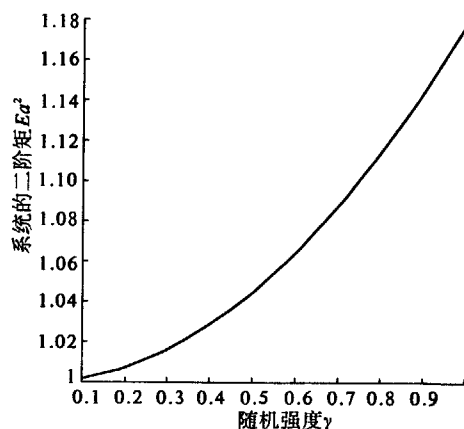


图 1 二阶矩随着随机强度 γ 的变化

Fig. 1 Change of the second moment Ea^2 with the random intensity γ

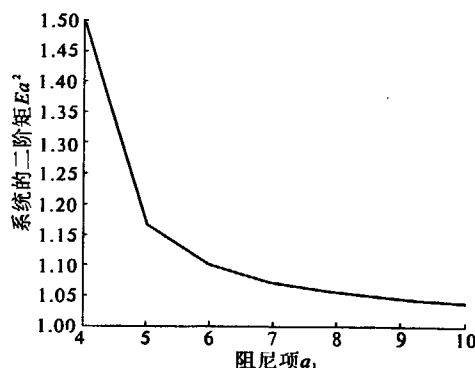


图 2 二阶矩随着阻尼项的变化

Fig. 2 Change of the second moment Ea^2 with the damping a_1

由以上可知: 当 γ 充分小时, 随机扰动 $\gamma w(t)$ 并不影响由式(9)定义的解的稳定性, 从式(21)和两图可知: 随着随机扰动强度 γ 的增大, 系统的均方响应将增大, 而随着系统阻尼 a_1 的增大, 系统的均方响应将减小, 这是符合物理现象的.

5 结论

在相对转动非线性动力系统中, 随机扰动对整个系统会产生一定的影响. 如系统的稳态响应及均值响应随阻尼项、随机项有相应的变化但小的随机强度不会对系统解的稳定性产生大的改变. 考虑随机扰动的影响对研究相对转动非线性动力系统的动力行为有一定的价值, 笔者仅给出了随机扰动对系统的稳定性影响, 若系统处于混沌、分岔等状态, 随机扰动对整个系统的影响还有待于研究.

参考文献:

- [1] 罗少凯. 转动系统的相对论性分析力学理论[J]. 商丘师范学院学报, 1998, 19(S1): 45-53.
- [2] 罗少凯, 傅景礼, 陈向炜. 转动系统相对论性 Birkhoff 动力学的基本理论[J]. 物理学报, 2001, 21(3): 2314-2321.
- [3] 王坤. 相对转动动力学方程的稳定及在一类黏性弹性系数下的解[J]. 物理学报, 2005, 54(9): 3987-3992.
- [4] 赵武, 刘彬, 时培明, 等. 一类非线性相对转动周期系统的平衡稳定性分析[J]. 物理学报, 2006, 55(8): 3852-3857.
- [5] 孟宗, 刘彬. 一类非线性相对转动动力系统的平衡稳定性及组合谐波近似解[J]. 物理学报, 2008, 57(3): 1329-1334.
- [6] 时培明, 刘彬, 蒋金水. 耦合相对转动非线性动力系统的稳定性与近似解[J]. 物理学报, 2009, 58(4): 2147-2154.
- [7] 刘爽, 刘彬, 时培明. 一类相对转动系统 Hopf 分岔的非线性反馈控制[J]. 物理学报, 2009, 58(7): 4383-4390.
- [8] 时培明, 刘彬, 侯东晓. 一类相对转动非线性动力系统的混沌运动[J]. 物理学报, 2008, 57(3): 1321-1328.
- [9] 王坤, 乔杰敏, 关新平. 一类相对转动动力系统周期解的唯一性也精确周期解[J]. 物理学报, 2010, 59(6): 3648-3653.
- [10] NAYFEH A H, SERHAN S J. Response statistics of nonlinear systems to combined deterministic and random excitation[J]. International Journal of Nonlinear Mechanics, 1990, 25(5): 493-509.

- [11] 戎海武,孟光,王向东,等.窄带随机噪声激励下强非线性系统的响应[J].振动工程学报,2003,13(1):15-19.
- [12] 戎海武,王向东,徐伟,等.窄带随机噪声作用下Duffing振子的双峰稳态概率密度[J].物理学报,2005,54(6):2557-2561.
- [13] 杨晓丽,徐伟,孙中奎,等.窄带随机噪声参激作用下强非线性系统的响应[J].振动工程学报,2005,18(2):4523-4529.
- [14] 朱位秋.随机振动[M].北京:科学出版社,1992:89-212.
- [15] 刘延柱,陈立群.非线性振动[M].北京:高等教育出版社,2001:65-112.

Response of a Relative-Rotation Nonlinear System Under Random Noise Excitation

WANG Kun, WU Hai-hua, ZHONG Shu-juan

(School of Science, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: The steady-state response of a relative-rotation system under random noise excitation is investigated. The method of multiple scales is applied to this system. The method of linearization and moment means are used to discuss that damping term and random item have a great influence on secondary moment of the system, rule is utilized to give the condition of stability of system. It is theoretically illustrated that the small random intensity has little influence on the stability of solution, and the second moment of system will decrease with the increase of the damping and increase with the increase of the random intensity. Finally, the theoretical analysis is consistent with numerical simulation.

Key words: relatively rotation system; method of multiple scales; moment method; stability of motion

(上接第72页)

Analysis and Improvement of Node Selection Mechanism in P2P Center

ZHUANG Lei, GUO Yong-ping, KONG Yan, SUN Yi-xiao

(School of Information Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: In streaming media system, simple source node selection mechanism causes a topology mismatching problem of streaming media system, meanwhile it brings about no guarantee of QOS. In this paper, after analysing the structure of streaming media system, we present an improved source node selection mechanism that acts both on the server and requesting peer. At the server, we aim to solve the topology mismatching problem and present node selection mechanism based on the IP database. At the requesting peer, the available bandwidth, packet loss rate and network delay are used to get more useful nodes based on the capability of serving node.

Key words: streaming media system; node selection; topology mismatching; packet loss rate; network delay