

变温场中含球形空腔的热黏弹性体动态热应力分析

陈亚娟^{1,2}, 尚新春¹

(1. 北京科技大学 应用科学学院, 北京 100083; 2. 河南理工大学 土木工程学院, 河南 焦作 454000)

摘 要: 为解决考虑温度变化的黏弹性体动态热应力问题, 从材料的热黏弹性力学性质出发, 依据热黏弹性 Kelvin-Voigt 微分型本构方程及热传导理论和拉普拉斯积分变换方法, 求解了带球形空腔的无限大体的动态热应力问题, 得到具有温度相关性的黏弹性材料的热应力动态问题的控制方程组, 获得位移和应力在拉普拉斯变换域内的精确解, 数值求解 Laplace 逆变换, 给出了温度、位移和应力的分布图。

关键词: 热黏弹性; 球对称; 非定常热应力; Laplace 变换

中图分类号: O343

文献标志码: A

0 引言

目前, 工程结构要求能够在高温、高压、高应变率等复杂的环境下长时间安全工作。急剧的加热或冷却使黏弹性体上产生剧烈的温度变化, 并相应地产生非定常热应力, 需要考虑动力项的影响, 属于动态热应力问题。近年来动态热应力和热冲击问题的求解, 应用数值有限元解法比较多见, 如屈钧利^[1]依据变温黏弹性松弛型本构理论、热传导方程和有限元方法, 对低碳钢厚壁球的非定常热应力进行了计算分析。钱国平^[2]、罗辉^[3]等利用有限元方法分析了沥青路面的热黏弹性温度应力等问题。对于动态热应力问题的解析解, 文献[4]研究了带球形空腔的广义热弹性无限大材料的弹性模量和传热系数与材料参考温度的相关性。对于本构方程与时间有关的黏弹性材料, 在受到变温场作用下的热应力问题, 其解析方法就变得更加困难。

笔者给出球坐标下的热黏弹性 Kelvin-Voigt 微分型本构方程, 对它们进行无量纲化, 并结合非定常热传导方程, 给出了具有温度相关性的黏弹性材料的热应力动态问题的控制方程组, 并进行 Laplace 变换, 通过联立边界条件和初始条件, 变成了常微分方程的求解问题, 获得了位移和应力在拉普拉斯变换域内的精确解, 最后通过数值逆变换, 得到了温度、位移和应力的分布规律。

1 基本方程

均匀、各向同性的无限大黏弹性介质, 其中包含一个半径为 b 的球形空腔, 空腔表面没有应力, 只受到温度的急剧变化, 不考虑体力和热源的影响。我们把问题描述为空间球对称的动态热应力问题, 引入空间球坐标 (r, θ, ϕ) , 球空腔的中心为球坐标的原点, 并假定问题是完全的球对称, 在域 $b \leq r < \infty$ 中, 位移和温度都是 r 和 t 的函数, 非零的位移分量为 $u_r = u(r, t)$, 温度函数为 $T = T(r, t)$ 。基本方程如下:

(1) 球坐标下的运动方程(不考虑体力)为

$$\frac{\partial \tau_r}{\partial t} + \frac{2}{r}(\tau_r - \tau_{\theta\theta}) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

(2) 球坐标下的几何方程(小变形)为

$$e_{\theta\theta} = e_{\phi\phi} = \frac{u}{r} \quad (2)$$

(3) 应力-应变关系(Kelvin-Voigt 模型^[5])

$$\tau_{ij} = \left(\lambda_e + \lambda_v \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta \delta_{ij} + 2 \left(\mu_e + \mu_v \frac{\partial}{\partial t} \right) e_{ij} - \beta T \delta_{ij}$$

式中: τ_{ij} 是应力分量; e_{ij} 是应变分量; λ_e, μ_e 是弹性体拉梅常数; λ_v, μ_v 是黏弹性体拉梅常数; $\Delta = e_{ii}$ 是体应变; $\beta = (3\lambda_e + 2\mu_e)\alpha_e$, α_e 是线性热膨胀系数; T 是对于初始温度的改变量; δ_{ij} 为 Kronecker Delta 函数。

球坐标下的本构关系为^[6]

收稿日期: 2011-05-20; 修订日期: 2011-06-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772024)

作者简介: 陈亚娟(1976-), 女, 河南开封人, 北京科技大学博士研究生, 河南理工大学副教授, 主要从事固体力学方面的研究, E-mail: juanzichen@hpu.edu.cn.

$$\begin{cases} \tau_{rr} = (\lambda_e + \mu_e) \frac{\partial u}{\partial r} + (\lambda_e + 2\mu_e) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right) + \\ \quad \left(\lambda_e + \lambda_v \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{2u}{r} - \beta T \\ \tau_{\theta\theta} = \tau_{\phi\phi} = \left(\lambda_e + \lambda_v \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial u}{\partial r} + 2(\lambda_e + \mu_e) \frac{u}{r} + \\ \quad 2(\lambda_e + \mu_e) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u}{r} \right) - \beta T \end{cases}$$

定义以下无量纲量:

$$c_1^2 = \frac{\lambda_e + 2\mu_e}{\rho}, c_2^2 = \frac{\lambda_v + 2\mu_e}{\rho}, R = \frac{c_1}{k_d} r, \\ U = \frac{c_1(\lambda_e + 2\mu_e)}{k_d \beta T_0} u, \eta = \frac{c_1^2}{k_d} t, Z = \frac{T}{T_0}.$$

则本构方程变为

$$\sigma_{RR} = \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{c_2^2}{k_d} \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + 2\lambda_1 \frac{U}{R} + \frac{2\lambda_2}{R} \frac{\partial U}{\partial \eta} - Z \quad (3)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{U}{R} + \frac{c_2^2}{k_d} \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \eta} + \lambda_1 \left(\frac{\partial U}{\partial R} + \frac{U}{R} \right) + \\ \lambda_2 \left(\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial U}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) - Z \quad (4)$$

$$\text{这里: } \sigma_{RR} = \frac{\tau_{rr}}{\beta T_0}, \sigma_{\theta\theta} = \frac{\tau_{\theta\theta}}{\beta T_0}, \lambda_1 = \frac{\lambda_e}{c_1^2 \rho}, \lambda_2 = \frac{\lambda_v}{k_d \rho}.$$

把本构方程(3)、(4)代入到运动方程(1)的无量纲化后的方程中,并化简得

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{2}{R^2} U \right) + \frac{c_2^2}{k_d} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} + \right. \\ \left. \frac{2}{R} \frac{\partial U}{\partial R} - \frac{2}{R^2} U \right) - \frac{\partial Z}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \quad (5)$$

(4)不考虑耦合项和内热源的球对称非定常热传导方程为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{k_d} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6)$$

式中: k_d 表示热扩散系数.

2 边界条件

(1)初始条件:在球腔的内表面处,即 $r=b$,根据无量纲变换,令 $R=\xi=c_1 b \cdot k_d^{-1}$.在最初时刻 $t=0$,即 $\eta=c_1^2 \cdot k_d^{-1} t=0$,整个黏弹性介质是不受干扰的.也就是说,

$$\begin{cases} U=0, Z=0 \quad (\text{当 } \eta=0, R \geq \xi) \\ \frac{\partial U}{\partial \eta}=0, \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}=0 \quad (\text{当 } \eta=0, R \geq \xi) \end{cases} \quad (7)$$

(2)边界条件:

$$\sigma_{RR}(\xi, \eta)=0 \text{ 或 } \sigma_{RR}(\xi, p)=0 \quad (\text{当 } \eta \geq 0, R=\xi) \quad (8a)$$

$$Z(\xi, \eta)=Z_0 H(\eta) \text{ 或 } \bar{Z}(\xi, \eta)=\frac{Z_0}{p} \quad (\text{当 } \eta \geq 0, R=\xi) \quad (8b)$$

其中, $H(\eta)$ 是 Heaviside 单位阶跃函数.

$$U(\xi, \eta)=0 \text{ 或 } \bar{U}(\xi, p)=0 \quad (\text{当 } R \rightarrow \infty) \quad (8c)$$

3 非定常热应力计算

3.1 非定常温度场

讨论了在初始温度为 $T=0$ 的无限大黏弹性体的内部有一半径为 b 的球形空间,考虑从 $t=0$ 瞬间开始,空腔内边界受到温度的急剧变化,温度由0突变到 T_0 ,满足热传导方程式(6),相应的初始条件为: $T(r, t)=0, r \geq b$. 经过 Laplace 变换和逆变换之后,得到温度场的解为: $T(r, t)=T_0 \cdot \frac{b}{r} \cdot \operatorname{erfc} \frac{r-b}{\sqrt{k_d t}}$,接着

进行无量纲化后变为

$$Z(R, \eta)=\frac{\xi}{R} \cdot \operatorname{erfc} \frac{R-\xi}{2\sqrt{k_d \eta}} \quad (9)$$

3.2 Laplace 变换

对式(5)、(9)进行 Laplace 变换:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} - \frac{2}{R^2} \right) \bar{U} - p^2 c_3 \bar{U} = c_3 \frac{\partial \bar{Z}}{\partial R} \quad (10)$$

$$\bar{Z}(R, p) = \frac{\xi}{Rp} \cdot e^{-(R-\xi)\sqrt{p/k_d}} \quad (11)$$

式中: p 是 Laplace 变换参数, $c_3 = \left(1 + \frac{c_2^2}{k_d} p \right)^{-1}$. 初始条件式(7)和式(11)都代入到式(10),得

$$\left(\frac{d^2}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d}{dR} \right) \bar{U} - \left(\frac{2}{R^2} + p^2 c_3 \right) \bar{U} = - \\ c_3 \frac{\xi}{p} \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R} \sqrt{p/k_d} \right) \cdot e^{-(R-\xi)\sqrt{p/k_d}} \quad (12)$$

解此常微分方程,并把位移边界条件8(c)代入得

$$\bar{U}(R, p) = \frac{1}{R} \left(p \sqrt{c_3} + \frac{1}{R} \right) M(p) e^{-Rp\sqrt{c_3}} + \\ \frac{k_d \xi}{p^2} \cdot \frac{1+R\sqrt{p/k_d}}{R^2(k_d p - c_3^{-1})} e^{-(R-\xi)\sqrt{p/k_d}} \quad (13)$$

其中, $M(p)$ 是待定函数.

为了求出 $M(p)$,需要利用边界条件8(a),代入到式子(13),得

$$M(p) = e^{Rp\sqrt{c_3}} \cdot (2(1+\xi\sqrt{p/k_d})((k_d-\lambda_1) + \\ (c_2^2-\lambda_2)p) + \xi^2 k_d p^2) \cdot (\xi^{-1} p^2 (k_d p - c_3^{-1}) (2(\xi p \sqrt{c_3} + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 p) - 2\xi^3 c_3^{-1} p^{-3} - \xi^2 c_3^{-1} p^2))^{-1} \quad (14)$$

把式子(14)代入到(13),就可以求出位移在 Laplace 空间的解.

$$\bar{U}(R, p) = \frac{1}{R} \left(p \sqrt{c_3} + \frac{1}{R} \right) e^{-(R-\xi)p\sqrt{c_3}} \cdot (2(1+\xi$$

$$\sqrt{p/k_d}((k_d - \lambda_1) + (c_2^2 - \lambda_2)p) + \xi^2 k_d p^2 \cdot (\xi^{-1} p^2 (k_d p - c_3^{-1})(2(\xi p \sqrt{c_3} + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 p) - 2\xi^3 c_3^{-1} p^{-3} - \xi^2 c_3^{-1} p^2))^{-1} + k_d \xi \cdot p^{-2} \cdot (1 + R \sqrt{p/k_d})(R^2(k_d p - c_3^{-1}))^{-1} e^{-(R-\xi)\sqrt{p/k_d}} \quad (15)$$

将位移解(15)代入到本构方程(3)、(4)的 Laplace 变换式中,求得 Laplace 空间的应力解。

$$\overline{\sigma_{RR}}(R, p) = \frac{1}{R^3} \cdot [2(\lambda_1 + \lambda_2 p)(pR \sqrt{c_3} + 1) + (\lambda_1 + \lambda_2 p) \cdot (pR \sqrt{c_3} + 1 - 2p^{-3} R^3 - c_3 p^2 R^2)] \cdot e^{-(R-\xi)\sqrt{p/k_d}} \cdot (2(1 + \xi \sqrt{p/k_d})((k_d - \lambda_1) + (c_2^2 - \lambda_2)p) + \xi^2 k_d p^2) \cdot (\xi^{-1} p^2 (k_d p - c_3^{-1})(2(\xi p \sqrt{c_3} + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 p) - 2\xi^3 c_3^{-1} p^{-3} - \xi^2 c_3^{-1} p^2))^{-1} + (k_d \xi (2(1 + R \sqrt{p/k_d})(\lambda_1 + \lambda_2 p - c_3^{-1}) - c_3^{-1} p R^2 k_d)) \cdot (p^2 R^3 (k_d p - c_3^{-1}))^{-1} + e^{-(R-\xi)\sqrt{p/k_d}} - \xi R p^{-1} \cdot e^{-(R-\xi)\sqrt{p/k_d}} \quad (16)$$

$$\overline{\sigma_{\theta\theta}}(R, p) = \frac{1}{R^3} \cdot [c_3^{-1}(pR \sqrt{c_3} + 1) + (\lambda_1 + \lambda_2 p)(pR \sqrt{c_3} + 1 - 2p^{-3} R^3 - c_3 p^2 R^2)] e^{-(R-\xi)\sqrt{p/k_d}} \cdot (2(1 + \xi \sqrt{p/k_d})((k_d - \lambda_1) + (c_2^2 - \lambda_2)p) + \xi^2 k_d p^2) \cdot (\xi^{-1} p^2 (k_d p - c_3^{-1})(2(\xi p \sqrt{c_3} + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 p) - 2\xi^3 c_3^{-1} p^{-3} - \xi^2 c_3^{-1} p^2))^{-1} + (k_d \xi ((1 + R \sqrt{p/k_d})(c_3^{-1} - \lambda_1 - \lambda_2 p) - (\lambda_1 + \lambda_2 p)p R^2 / k_d) \cdot (p^2 R^3 (k_d p - c_3^{-1}))^{-1} e^{-(R-\xi)\sqrt{p/k_d}} - \xi R p^{-1} \cdot e^{-(R-\xi)\sqrt{p/k_d}} \quad (17)$$

3.3 Laplace 逆变换

为了求得式(14 ~ 17)中的位移和应力分布,需进行拉普拉斯逆变换^[7],将利用基于函数傅里叶展开的数值技术进行数值反变换.借助这种方法任何在拉普拉斯域中的函数 $\bar{f}(s)$ 都可以变换到时间域 $f(t)$,令 $\bar{f}(s)$ 作为函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换形式,拉普拉斯反变换公式^[8]表述为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \bar{f}(s) e^{st} ds \quad (18)$$

其中, b 为大于 $f(t)$ 的所有实部的常数. 取 $s = b + iy$, 则有

$$f(t) = \frac{e^{bt}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} \bar{f}(b + iy) dy \quad (19)$$

考虑近似积分 $\Delta\pi/t_1$, 得到

$$f(t) = \frac{e^{bt}}{t_1} \left[\frac{1}{2} \bar{f}(b) + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^N e^{ik\pi/t_1} \bar{f}(b + ik\pi/t_1) \right) \right] \quad (20)$$

基于数值目的,近似函数为

$$f_N(t) = \frac{e^{bt}}{t_1} \left[\frac{1}{2} \bar{f}(b) + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^N e^{ik\pi/t_1} \bar{f}(b + ik\pi/t_1) \right) \right] \quad (21)$$

其中, N 为足够大整数,由下式选取

$$e^{bt} \operatorname{Re} [e^{iN\pi/t_1} \bar{f}(b + iN\pi/t_1)] < \xi \quad (22)$$

ξ 为根据精度需求而事先选取的小正数.

式(22)为适用于 $2t_1 \geq t \geq 0$ 的数值逆变换公式. 特殊地,取 $t = t_1$, 得到:

$$f_N(t) = \frac{e^{bt}}{t_1} \left[\frac{1}{2} \bar{f}(b) + \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^N (-1)^k \bar{f}\left(b + \frac{ik\pi}{t_1}\right) \right) \right] \quad (23)$$

式中: $bt \approx 4.7^{[9]}$; Re 指实部; i 为虚数单位.

4 数值算例

根据式(23),借助拉普拉斯反变换可以得到球体内无量纲温度、无量纲位移、无量纲应力的分布与变化规律. 在计算中,选取铜质材料进行数值计算,其性能参数分别^[9]为: $\lambda_e = 7.76 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, $\mu_e = 3.86 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$, $\alpha_e = 1.78 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $C_E = 383.1 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\rho = 8954 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $k_d = 114.1 \text{ m}^2/\text{s}$, $b = 0.027 \text{ m}$. 假定的松弛时间为: $t_0 = 1.0 \times 10^{-7} \text{ s}$, $\lambda_e = \lambda_e t_0$, $\mu_e = \mu_e t_0$. 球体内无量纲温度、无量纲位移、无量纲应力的分布与变化规律如图1 ~ 3所示.

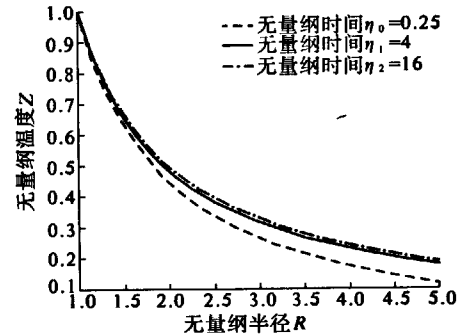


图1 无量纲温度随无量纲半径的变化规律

Fig.1 Dimensionless temperature vs radius

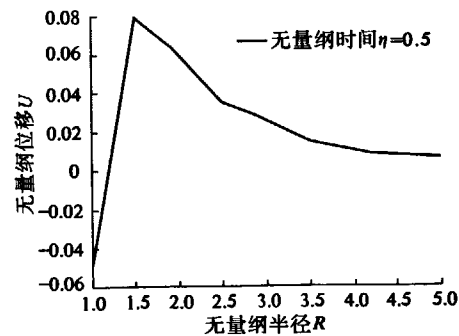


图2 无量纲径向位移随无量纲半径的变化规律 ($\eta = 0.5$)

Fig.2 Dimensionless radial displacement vs radius

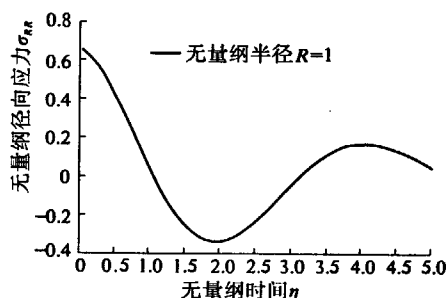


图3 无量纲径向应力随无量纲时间的变化规律

Fig.3 Dimensionless radial stress vs dimensionless time

5 结论

笔者基于广义热黏弹性理论,研究了带球形空腔的无限大体受到非定常温度场作用下的动态热应力问题,借助量纲分析方法,给出了热黏弹性体微分控制方程,得到了位移和应力在拉普拉斯变换域内的精确解,通过算例给出了球体内无量纲温度、无量纲位移、无量纲应力的分布规律.从图1可以看出,随着时间的增加,球体内各点的温度趋于均匀.图3表示了球形空腔的表面上应力是振荡的,随着时间的增加,球体内各点的应力逐步趋近于稳态值.笔者的研究方法对黏弹性体在热冲击和机械冲击共同作用下的动态特性研究可以起到一定的参考作用.

参考文献:

[1] 屈钧利. 基于热黏弹性理论的低碳钢厚壁球非定

常热应力计算分析[J]. 西安科技大学学报, 2004, 24(3): 362-364.

[2] 钱国平, 郭忠印, 郑健龙, 等. 环境条件下沥青路面热黏弹性温度应力计算[J]. 同济大学学报: 自然科学版, 2003, 31(2): 150-155.

[3] 罗辉, 朱宏平, 陈传尧. 沥青路面的热黏弹性温度应力分析[J]. 公路交通科技, 2008, 25(2): 6-11.

[4] H·M 约塞夫·带球形空腔的广义热弹性无限大材料的弹性模量和传热系数与材料参考温度的相关性[J]. 应用数学和力学, 2005, 26(4): 431-436.

[5] BANERJEE S, ROYCHOUDHURI S K. Spherically symmetric thermo-visco-elastic waves in a visco-Elastic medium with a spherical cavity[J]. Computers Math Applic, 1995, 30(1): 91-98.

[6] KAR A, KANORIA M. Generalized thermo-visco-elastic problem of a spherical shell with three-phase-lag effect. Applied Mathematical Modelling, 2009, 33: 3287-3298.

[7] HANIG G, HIRDES U. A method for the numerical inversion of Laplace transform[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1984, 10: 113-132.

[8] 徐红玉, 张元冲. 考虑热松弛时间的半无限黏弹性压电杆的热冲击问题[J]. MEMS 器件与技术, 2004(8): 30-37.

[9] 何天虎, 井绪明. 半无限黏弹杆的广义磁热黏弹问题[J]. 应用力学学报, 2009, 26(3): 584-588.

Dynamic Thermal Stress Analysis of Thermo-Visco-Elasticity with A Spherical Cavity under Temperature Variation

CHEN Ya-juan^{1,2}, SHANG Xin-chun¹

(1. School of Applied Science, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China; 2. School of Civil Engineering, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454000, China)

Abstract: In order to solve the dynamic thermal-stress problems of thermo-viscoelasticity, considering the properties of thermo-visco-elasticity materials, and according to the Kelvin-Voigt differential type constitution equations of thermo-visco-elasticity, thermal conduction theory and Laplace integral transform method, the dynamic thermal-stress problem of an infinite material with a spherical cavity was solved, we got control equations and the exact solutions of displacement and stress in Laplace transform fields were gained. The distribution graphs of temperature, displacement and stress were given by numerical inverse transform.

Key words: thermo-visco-elasticity; spherical symmetry; non-stationary thermal stress; Laplace transform