

文章编号:1671-6833(2011)05-0001-06

## 矩形边界平面问题在边界条件作用下应力解

许琪楼

(郑州大学 土木工程学院,河南 郑州 450001)

**摘 要:**边界条件作用下平面问题应力解为双调和方程解,由通解和特解组成.应力函数通解为含有8个待定系数的双向单三角级数,与矩形边界8个边界条件相对应;级数曲线波形符合相应方向边界法向面力或法向位移固有分布特点.应力函数特解有边界法向面力、边界法向位移和边界常量剪应力3种;将任意分布的边界法向面力和边界法向位移进行格式化处理,由给定构造规则确定前2个特解.在特定边界条件下常量剪应力特解可不予考虑.随法向边界条件的变化有16种应力函数表达式,以处理256种矩形边界平面问题,推导了常见边界的特解表达式,分析了求解过程中的几个问题,并附有算例.

**关键词:**弹性力学;平面问题;双调和方程;应力函数通解;应力函数特解

**中图分类号:** TB125;O343

**文献标志码:** A

### 0 引言

平面问题是一个经典的力学课题,但在中外文献与专著中尚无一种系统、有效的理论解法<sup>[1-3]</sup>.文献[4]结合二对边法向支承矩形边界平面问题提出一种新解法,该解法计算要点是:

(1) 无点支座或有点支座但其支反力可以由静力平衡条件确定的平面问题设定为广义静定问题,否则为广义超静定问题.前者可以直接求解,后者要用叠加法求解.

(2) 广义静定问题解由角点集中力解、体力分量解和计算边值条件解组成,这3种解满足不同的应变协调方程,必须分别计算.

(3) 角点集中力解和体力分量解由平衡方程和各自的应变协调方程直接求解.这2种解在边界处的应力和位移反向作用在相应边界上,为虚拟边值条件,实际边界条件与虚拟边值条件之和为计算边值条件.

(4) 计算边值条件解即为双调和方程解,可由应力函数 $\phi$ 表示,由通解 $\phi_1$ 和特解 $\phi_2$ 组成.

角点集中力解和体力分量解的求解过程不引用边界条件,因此当边界条件改变时其求解理念和方法仍保持不变.笔者主要讨论平面应力问题随边界条件的变化计算边值条件应力解的计算方法.为简便起见,称计算边值条件为边界条件.

### 1 边界条件

平面问题有4种边界条件.图1(a)为文献[4]采用的角点码、坐标系和边界条件图示方法.  $OA$ 边( $x=0$ )为完全支承边,边界上法向和切向位移为已知值; $OB$ 边( $y=0$ )为切向支承和法向自由边,边界上切向位移和法向面力为已知值; $AC$ 边( $y=b$ )为法向支承和切向自由边,边界上法向位移和切向面力为已知值; $BC$ 边( $x=a$ )为完全自由边,边界上法向和切向面力为已知值.此外在平面内还可能存在点支座,如图1(b)示.

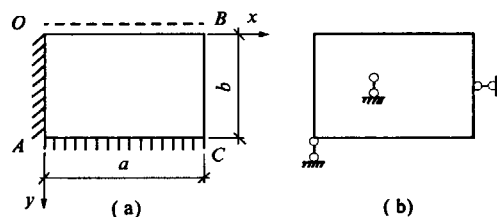


图1 边界条件图示

Fig. 1 Illustration of boundary condition

矩形边界中每条边界都有4种选择.为简便起见,边界条件用代号 $Nx^* - Ny^* - Px^* - Py^*$ 表示.其中 $Nx$  ( $Ny$ )表示 $x=0$ 和 $x=a$ 边界( $y=0$ 和 $y=b$ 边界)法向条件; $Px$  ( $Py$ )表示 $x=0$ 和 $x=a$ 边界( $y=0$ 和 $y=b$ 边界)切向条件;符号“\*”表示类别:1表示 $x=0$ 和 $x=a$ 边界( $y=0$

收稿日期:2011-04-14;修订日期:2011-06-16

作者简介:许琪楼(1944-),男,山西长治人,郑州大学教授,主要从事钢结构和弹性力学方面的研究,E-mail:apple-dang@163.com.

和  $y=b$  边界)均为自由边;2 表示  $x=0(y=0)$  为自由边,  $x=a(y=b)$  为支承边;3 表示  $x=0(y=0)$  为支承边,  $x=a(y=b)$  为自由边;4 表示  $x=0$  和  $x=a(y=0$  和  $y=b)$  为支承边。

边界条件形式多样,笔者将其转化为三角级数格式。它形式单一,在给定区间内连续且处处可导,可以处理任意分布的边界荷载或边界位移。级数必须是一个完整的正交三角函数族。图 1(a)所示坐标系,在  $[0, a]$  区间内,级数  $\sum_{m=1,2,3} \sin \frac{m\pi x}{a}$ 、

$\sum_{m=0,1,2} \cos \frac{m\pi x}{a}$ 、 $\sum_{m=1,3,5} \sin \frac{m\pi x}{2a}$ 、 $\sum_{m=1,3,5} \cos \frac{m\pi x}{2a}$  都符合要求;在  $[0, b]$  区间内,也有 4 种级数符合要求。转化后的级数表达式要完整地包容原函数的全部内容。例如,将  $f(x)$  在  $[0, a]$  区间内展成

$\sum_{m=1,2,3} \sin \frac{m\pi x}{a}$  级数时,由于  $x=0$  和  $x=a$  时级数为零值,级数无法包容端点函数值  $f(0)$  和  $f(a)$ ,为此  $f(0)$ 、 $f(a)$  必须单列;展开式应为  $f(x) = f(0) + \frac{[f(a) - f(0)]x}{a} + \sum_{m=1,2,3} S_m \sin \frac{m\pi x}{a}$ , 式中  $S_m$  为部分函数值展开系数。如果有充分的理由证明忽略函数值  $f(0)$  和  $f(a)$  不影响  $f(x)$  的作用效应,也可将全部函数值直接对级数展开,文中这 2 种方式都有应用。函数  $f(x)$  对  $\sum_{m=1,3,5} \sin \frac{m\pi x}{2a}$  和  $\sum_{m=1,3,5} \cos \frac{m\pi x}{2a}$  展开时也有类似的问题。边界条件转化时级数类型不是随意选用的,通过分析物体受力和变形的特点选择与之匹配的级数形式,选用的类型具有唯一性。

## 2 应力函数通解 $\phi_1$

双调和方程是由正应力表示的应变协调方程转化而来,由边界法向条件对应的受力和变形特征确定  $\phi_1$  可以使求解理论和求解方法相统一。

为表示平面问题双向受力和变形特点,有

$$\phi_1 = \phi_{1x} + \phi_{1y} \quad (1)$$

式中:  $\phi_{1x}$  为由  $x=0$  和  $x=a$  二边法向条件确定的通解;  $\phi_{1y}$  为由  $y=0$  和  $y=b$  二边法向条件确定的通解。  $\phi_{1x}$ 、 $\phi_{1y}$  的一般形式为各包含 4 个待定系数的单三角级数,以与矩形边界平面问题 8 个边界条件相对应。三角级数应是完整的正交三角函数族,三角级数曲线波形要符合相应方向边界法向面力或法向位移固有的分布特点。由正应力和法向位移与应力函数间微分关系知:对法向自由边

界,三角级数在边界处应为零值,以反映法向自由边正应力为零的受力特点;对法向支承边,三角级数的一阶导数在边界处应为零值,以反映法向支承边法向位移为零的变形特点。

对  $Nx1$ :

$$\phi_{1x} = \sum_{m=1,2,3} (A_m \sinh \alpha y + B_m \cosh \alpha y + C_m \alpha y \sinh \alpha y + D_m \alpha y \cosh \alpha y) \sin \alpha x \quad (2)$$

式中:  $\alpha = \frac{m\pi}{a}$ ;  $A_m$ 、 $B_m$ 、 $C_m$ 、 $D_m$  为待定系数。

对  $Nx2$ :

$$\phi_{1x} = \sum_{m=1,3,5} (A_m \sinh \lambda y + B_m \cosh \lambda y + C_m \lambda y \sinh \lambda y + D_m \lambda y \cosh \lambda y) \sin \lambda x \quad (3)$$

式中:  $\lambda = \frac{m\pi}{2a}$ 。

对  $Nx3$ :

$$\phi_{1x} = \sum_{m=1,3,5} (A_m \sinh \lambda y + B_m \cosh \lambda y + C_m \lambda y \sinh \lambda y + D_m \lambda y \cosh \lambda y) \cos \lambda x \quad (4)$$

对  $Nx4$ :

$$\phi_{1x} = C_0 y^2 + D_0 y^3 + \sum_{m=1,2,3} (A_m \sinh \alpha y + B_m \cosh \alpha y + C_m \alpha y \sinh \alpha y + D_m \alpha y \cosh \alpha y) \cos \alpha x \quad (5)$$

级数  $\sum_{m=0,1,2} \cos \alpha x$  是一个完整的正交三角函数族。当  $m=0$  时  $\cos \alpha x = 1$ , 但  $\sinh \alpha y$ 、 $\alpha y \sinh \alpha y$ 、 $\alpha y \cosh \alpha y$  均为零值。为保证待定系数完整性并满足  $\nabla^4 \phi_1 = 0$ , 将  $m > 0$  时的双曲函数改为  $y$  的多项式, 即  $A_0 y + B_0 + C_0 y^2 + D_0 y^3$ , 其中  $A_0 y$ 、 $B_0$  不产生应力, 可以忽略。

同理, 对  $Ny1$ 、 $Ny2$ 、 $Ny3$ 、 $Ny4$  分别为

$$\phi_{1y} = \sum_{n=1,2,3} (E_n \sinh \beta x + F_n \cosh \beta x + G_n \beta x \sinh \beta x + H_n \beta x \cosh \beta x) \sin \beta y \quad (6)$$

$$\phi_{1y} = \sum_{n=1,3,5} (E_n \sinh \gamma x + F_n \cosh \gamma x + G_n \gamma x \sinh \gamma x + H_n \gamma x \cosh \gamma x) \sin \gamma y \quad (7)$$

$$\phi_{1y} = \sum_{n=1,3,5} (E_n \sinh \gamma x + F_n \cosh \gamma x + G_n \gamma x \sinh \gamma x + H_n \gamma x \cosh \gamma x) \cos \gamma y \quad (8)$$

$$\phi_{1y} = G_0 x^2 + H_0 x^3 + \sum_{n=1,2} (E_n \sinh \beta x + F_n \cosh \beta x + G_n \beta x \sinh \beta x + H_n \beta x \cosh \beta x) \cos \beta y \quad (9)$$

式中:  $\beta = \frac{n\pi}{b}$ ,  $\gamma = \frac{n\pi}{2b}$ ,  $E_n$ 、 $F_n$ 、 $G_n$ 、 $H_n$  为待定系数,  $G_0$ 、 $H_0$  为  $n=0$  时  $G_n$ 、 $H_n$ 。

通解  $\phi_1$  有 16 种形式。由于偏微分方程的相似性, 它与板弯曲挠度通解是类同的<sup>[5-7]</sup>。

## 3 应力函数特解

### 3.1 有 3 种特解

当法向自由边上有法向面力或法向支承边上有法向位移时,必须用应力函数特解来体现外界作用下特定的受力或位移;另外边界常量剪应力 $\tau_0$ 也是一种特殊的应力状态,它与边界法向面力无关,相应的位移表达式有2种形式:① $u = 2(1 + \mu)\tau_0 y/E$ ,  $v = 0$ , ② $u = 0$ ,  $v = 2(1 + \mu)\tau_0 x/E$ .  $E$ 为材料弹性模量, $\mu$ 为泊松比. 这种位移在边界上分布为:如果 $x = 0$ 和 $x = a$ 边界有法向位移时, $y = 0$ 和 $y = b$ 边界法向位移为零;反之亦然;位移方向具有不确定性. 当平面问题存在二邻边法向支承条件时,不管是那一种位移形式,都能包容在这二个已知的法向位移边界条件中;否则要引入相应特解来表现这种特定的受力和位移. 为此, $\phi_2$ 由下列3种特解组成:

$$\phi_2 = \phi_{21} + \phi_{22} + \phi_{23} \quad (10)$$

$\phi_{21}$ 、 $\phi_{22}$ 、 $\phi_{23}$ 分别为边界法向面力、边界法向位移和边界常量剪应力特解. 其中 $\phi_{23} = -\tau_0 xy$ . 当平面问题存在二相邻边为法向支承条件时, $\phi_{22}$ 可包容 $\phi_{23}$ , $\phi_{23}$ 不予考虑. 为防止相互关联, $\phi_{21}$ 、 $\phi_{22}$ 要服从以下规则:

(1)  $\phi_{21}$ 要满足法向自由边上法向面力分布, $\phi_{22}$ 要满足法向支承边上法向位移分布,且 $\nabla^4 \phi_{21} = 0$ ,  $\nabla^4 \phi_{22} = 0$ .

(2) 在法向自由边上, $\phi_{22}$ 对应的正应力为零值;在法向支承边上, $\phi_{21}$ 中级数部分对应的法向位移为零值,而非级数部分对应的法向位移或为零值或为线性分布.

### 3.2 $\phi_{21}$ 和 $\phi_{22}$ 构造方法

$$\begin{cases} \phi_{21} = \phi_{21x} + \phi_{21y} \\ \phi_{22} = \phi_{22x} + \phi_{22y} \end{cases} \quad (11)$$

式中: $\phi_{21x}$ 和 $\phi_{22x}$ 分别为 $x = 0$ 和 $x = a$ 边界法向面力和法向位移特解. 将边界面力或位移展成坐标 $y$ 为变量的三角级数. 级数类型与通解 $\phi_{1y}$ 中相同. 即 $Ny1$ 为 $\sum_{n_1=1,2,3} \sin\beta_1 y$ ,  $\beta_1 = \frac{n_1 \pi}{b}$ ;  $Ny2$ 为

$$\sum_{n_1=1,2,3} \sin\gamma_1 y, \gamma_1 = \frac{n_1 \pi}{2b}; Ny3 \text{ 为 } \sum_{n_1=1,2,3} \cos\gamma_1 y; Ny4 \text{ 为 } \sum_{n_1=0,1,2} \cos\beta_1 y.$$

由于特解与通解中级数取项数不同,写法上 $\beta$ 改为 $\beta_1$ , $\gamma$ 改为 $\gamma_1$ . 之后由 $x = 0$ 和 $x = a$ 二边法向面力和位移分布,根据构造规则确定 $\phi_{21x}$ 、 $\phi_{22x}$ . 由此得到的特解可以自动满足在 $y = 0$ 和 $y = b$ 边界上的构造要求. $x = 0$ 和 $x = a$ 二边法向条件有 $Nx1$ 、 $Nx2$ 、 $Nx3$ 、 $Nx4$ 4种变化,法向面力和位移有4种不同的分布状态,因此 $\phi_{21x}$ 、 $\phi_{22x}$

有16种表达式.

$\phi_{21y}$ 、 $\phi_{22y}$ 分别为 $y = 0$ 和 $y = b$ 二边法向面力和法向位移特解. 构造方法与 $\phi_{21x}$ 、 $\phi_{22x}$ 类同.  $\phi_{21y}$ 、 $\phi_{22y}$ 也有16种表达式. 下面列出图2所示算例 $\phi_{21}$ 、 $\phi_{22}$ 的表达式.

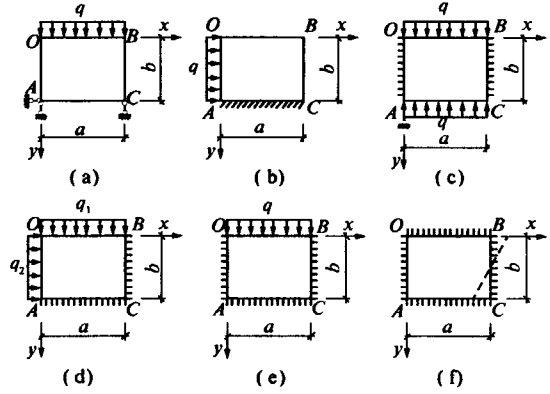


图2 算例受力图

Fig. 2 Some example diagram

图2(a)为 $Nx1 - Ny1$ 类平面问题,将四边法向面力展成如下级数.

$$\begin{cases} x = 0 \text{ 时, } \sigma_x = \sigma_{x0} + \frac{(\sigma_{xA} - \sigma_{x0})y}{b} + \sum_{n_1=1,2,3} \sigma_{nx1} \sin\beta_1 y \\ x = a \text{ 时, } \sigma_x = \sigma_{xB} + \frac{(\sigma_{xC} - \sigma_{xB})y}{b} + \sum_{n_1=1,2,3} \sigma_{nx2} \sin\beta_1 y \\ y = 0 \text{ 时, } \sigma_y = \sigma_{y0} + \frac{(\sigma_{yB} - \sigma_{y0})x}{a} + \sum_{m_1=1,2,3} \sigma_{my1} \sin\alpha_1 x \\ y = b \text{ 时, } \sigma_y = \sigma_{yA} + \frac{(\sigma_{yC} - \sigma_{yA})x}{a} + \sum_{m_1=1,2,3} \sigma_{my2} \sin\alpha_1 x \end{cases} \quad (12)$$

式中: $\alpha_1 = \frac{m_1 \pi}{a}$ ,  $\beta_1 = \frac{n_1 \pi}{b}$ .  $\sigma_{x0}$ 、 $\sigma_{xA}$ 、 $\sigma_{xB}$ 、 $\sigma_{xC}$  ( $\sigma_{y0}$ 、 $\sigma_{yA}$ 、 $\sigma_{yB}$ 、 $\sigma_{yC}$ ) 分别为角点 $O$ 、 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 处 $x$ 向正应力( $y$ 向正应力). 则:

$$\begin{cases} \phi_{21} = \frac{a-x}{a} \left[ \frac{\sigma_{x0} y^2}{2} + \frac{(\sigma_{xA} - \sigma_{x0}) y^3}{6b} \right] + \frac{x}{a} \left[ \frac{\sigma_{xB} y^2}{2} + \frac{(\sigma_{xC} - \sigma_{xB}) y^3}{6b} \right] + \frac{b-y}{b} \left[ \frac{\sigma_{y0} x^2}{2} + \frac{(\sigma_{yB} - \sigma_{y0}) x^3}{6a} \right] + \frac{y}{b} \left[ \frac{\sigma_{yA} x^2}{2} + \frac{(\sigma_{yC} - \sigma_{yA}) x^3}{6a} \right] \\ - \sum_{m_1=1,2,3} \frac{1}{\alpha_1^2 \sinh\alpha_1 b} \cdot [\sigma_{my1} \sinh\alpha_1 (b-y) + \sigma_{my2} \sinh\alpha_1 y] \sin\alpha_1 x - \sum_{n_1=1,2,3} \frac{1}{\beta_1^2 \sinh\beta_1 a} \cdot [\sigma_{nx1} \sinh\beta_1 (a-x) + \sigma_{nx2} \sinh\beta_1 x] \sin\beta_1 y \\ \phi_{22} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

图2(b)为  $Nx1 - Ny2$  类平面问题,边界法向面力和位移级数展开式为

$$\begin{cases} x=0 \text{ 时}, \sigma_x = \sigma_{x0} + \sum_{n_1=1,3,5} \sigma_{nx1} \sin r_1 y \\ x=a \text{ 时}, \sigma_x = \sigma_{xB} + \sum_{n_1=1,3,5} \sigma_{nx2} \sin r_1 y \\ y=0 \text{ 时}, \sigma_y = \sigma_{y0} + \frac{(\sigma_{yB} - \sigma_{y0})x}{a} + \sum_{m_1=1,2,3} \sigma_{my1} \sin \alpha_1 x \\ y=b \text{ 时}, v = v_A + \frac{(v_C - v_A)x}{a} + \sum_{m_1=1,2,3} v_{my2} \sin \alpha_1 x \end{cases} \quad (14)$$

式中:  $\gamma_1 = \frac{n_1 \pi}{2b}$ ,  $\sigma_{x0}$ 、 $\sigma_{xB}$  ( $\sigma_{y0}$ 、 $\sigma_{yB}$ ) 分别为角点  $O$ 、 $B$  处  $x$  向正应力( $y$  向正应力);  $v_A$ 、 $v_C$  分别为角点  $A$ 、 $C$  处  $y$  向位移。有:

$$\begin{aligned} \phi_{21} = & \frac{a-x}{a} \cdot \frac{\sigma_{x0} y^2}{2} + \frac{x}{a} \cdot \frac{\sigma_{xB} y^2}{2} + \frac{\sigma_{y0} x^2}{2} + \\ & \frac{(\sigma_{yB} - \sigma_{y0}) x^3}{6a} - \sum_{n_1=1,3,5} \frac{1}{r_1^2 \sinh r_1 a} [\sigma_{nx1} \sinh r_1 (a-x) + \sigma_{nx2} \sinh r_1 x] \sin r_1 y - \\ & \sum_{m_1=1,2,3} \frac{1}{\alpha_1^2 \cosh \alpha_1 b} \sigma_{my1} \cosh \alpha_1 (b-y) \sin \alpha_1 x \end{aligned} \quad (15)$$

$$\phi_{22} = - \sum_{m_1=1,2,3} \frac{E}{(1+\mu)} \cdot \frac{1}{\alpha_1 \cosh \alpha_1 b} v_{my2} \cdot \sinh \alpha_1 y \sin \alpha_1 x \quad (16)$$

图2(c)所示为  $Nx4 - Ny1$  类平面问题,特解  $\phi_{21}$ 、 $\phi_{22}$  可见文献[4]。

图2(d)为  $Nx2 - Ny2$  类平面问题,取:

$$\begin{cases} x=0 \text{ 时}, \sigma_x = \sigma_{x0} + \sum_{n_1=1,3,5} \sigma_{nx1} \sin r_1 y \\ x=a \text{ 时}, u = u_B + \sum_{n_1=1,3,5} u_{nx2} \sin r_1 y \\ y=0 \text{ 时}, \sigma_y = \sigma_{y0} + \sum_{m_1=1,3,5} \sigma_{my1} \sin \lambda_1 x \\ y=b \text{ 时}, v = v_A + \sum_{m_1=1,3,5} v_{my2} \sin \lambda_1 x \end{cases} \quad (17)$$

式中:  $\lambda_1 = \frac{m_1 \pi}{2a}$ ,  $\sigma_{x0}$  ( $\sigma_{y0}$ ) 为角点  $O$  在  $x$  向( $y$  向)正应力,  $u_B$  为角点  $B$  在  $x$  向位移,  $v_A$  为角点  $A$  在  $y$  向位移。则:

$$\begin{aligned} \phi_{21} = & \frac{\sigma_{x0} y^2}{2} + \frac{\sigma_{y0} x^2}{2} - \sum_{n_1=1,3,5} \frac{1}{\lambda_1^2 \cosh \lambda_1 b} \cdot \\ & \sigma_{my1} \cosh \lambda_1 (b-y) \sin \lambda_1 x - \sum_{m_1=1,3,5} \frac{1}{r_1^2 \cosh r_1 a} \cdot \\ & \sigma_{nx1} \cosh r_1 (a-x) \sin r_1 y \\ \phi_{22} = & - \sum_{m_1=1,3,5} \frac{E}{(1+\mu)} \frac{1}{\lambda_1 \cosh \lambda_1 b} v_{my2} \sinh \lambda_1 y \cdot \end{aligned} \quad (18)$$

$$\sin \lambda_1 x - \sum_{n_1=1,3,5} \frac{E}{1+\mu} \frac{1}{r_1 \cosh r_1 a} u_{nx2} \sinh r_1 x \sin r_1 y \quad (19)$$

图2(e)为  $Nx4 - Ny2$  类平面问题,取

$$\begin{cases} x=0 \text{ 时}, u = u_0 + \sum_{n_1=1,3,5} u_{nx1} \sin r_1 y \\ x=a \text{ 时}, u = u_B + \sum_{n_1=1,3,5} u_{nx2} \sin r_1 y \\ y=0 \text{ 时}, \sigma_y = \sigma_{y0} + \sum_{m_1=1,2,3} \sigma_{my1} \cos \alpha_1 x \\ y=b \text{ 时}, v = v_{y2} + \sum_{m_1=1,2,3} v_{my2} \cos \alpha_1 x \end{cases} \quad (20)$$

式中:  $u_0$ 、 $u_B$  分别为角点  $O$ 、 $B$  处  $x$  向位移;  $\sigma_{y0}$  为  $m=0$  时  $\sigma_{my1}$ , 其物理含义为  $y=0$  边界法向面力平均值;  $v_{y2}$  为  $m=0$  时  $v_{my2}$ , 其几何意义为  $y=b$  边界上法向位移平均值。则:

$$\phi_{21} = \frac{\sigma_{y0} x^2}{2} - \sum_{m_1=1,2,3} \frac{1}{\alpha_1^2 \cosh \alpha_1 b} \sigma_{my1} \cosh \alpha_1 (b-y) \cos \alpha_1 x \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \phi_{22} = & - \sum_{m_1=1,2,3} \frac{E}{1+\mu} \frac{1}{\alpha_1 \cosh \alpha_1 b} v_{my2} \sinh \alpha_1 y \cos \alpha_1 x \\ & - \frac{E y^2}{2a} (u_0 - u_B) + \sum_{n_1=1,3,5} \frac{E}{1+\mu} \frac{1}{r_1 \sinh r_1 a} [u_{nx1} \cosh r_1 \\ & (a-x) - u_{nx2} \cosh r_1 x] \sin r_1 y \end{aligned} \quad (22)$$

图2(f)为  $Nx4 - Ny4$  类平面问题,取:

$$\begin{cases} x=0 \text{ 时}, u = u_{ox1} + \sum_{n_1=1,2,3} u_{nx1} \cos \beta_1 y \\ x=a \text{ 时}, u = u_{ox2} + \sum_{n_1=1,2,3} u_{nx2} \cos \beta_1 y \\ y=0 \text{ 时}, v = v_{oy1} + \sum_{m_1=1,2,3} v_{my1} \cos \alpha_1 x \\ y=b \text{ 时}, v = v_{oy2} + \sum_{m_1=1,2,3} v_{my2} \cos \alpha_1 x \end{cases} \quad (23)$$

式中:  $u_{ox1}$ 、 $u_{ox2}$  分别为  $n=0$  时的  $u_{nx1}$ 、 $u_{nx2}$ , 其几何意义为  $x=0$  和  $x=a$  边界上法向位移平均值。  $v_{oy1}$ 、 $v_{oy2}$  分别为  $m=0$  时  $v_{my1}$ 、 $v_{my2}$ , 其几何意义分别为  $y=0$  和  $y=b$  边界上法向位移平均值。则:

$$\begin{aligned} \phi_{21} = & 0 \\ \phi_{22} = & \frac{E y^2}{2a} (u_{ox2} - u_{ox1}) + \sum_{n_1=1,2,3} \frac{E}{1+\mu} \frac{1}{\beta_1 \sinh \beta_1 a} \cdot \\ & [u_{nx1} \cosh \beta_1 (a-x) - u_{nx2} \cosh \beta_1 x] \cos \beta_1 y + \\ & \frac{E x^2}{2b} (v_{oy2} - v_{oy1}) + \sum_{m_1=1,2,3} \frac{E}{1+\mu} \frac{1}{\alpha_1 \sinh \alpha_1 b} \cdot \\ & [v_{my1} \cosh \alpha_1 (b-y) - v_{my2} \cosh \alpha_1 y] \cos \alpha_1 y \end{aligned} \quad (24)$$

## 4 求解过程中的几个问题

### 4.1 确定位移表达式中刚体位移系数

边界位移条件和位移分量表达式应包含有相同的刚体位移成分. 为此要通过一些控制点的位移值或某些位移物理量确定位移表达式中刚体位移系数. 位移表达式一般形式为

$$\begin{cases} u = u(x, y) + d_0 y + d_1 \\ v = v(x, y) - d_0 x + d_2 \end{cases} \quad (25)$$

式中:  $u(x, y)$ 、 $v(x, y)$  为与通解  $\phi_1$  和特解  $\phi_2$  有关的位移值,  $d_1$ 、 $d_2$  分别为  $x$  向和  $y$  向刚体平动位移系数,  $d_0$  为刚体转动位移系数. 图 2(d)、(e)、(f) 所示的平面问题, 存在二邻边法向支承的边界条件, 可以确保位移边界条件与位移分量表达式有相同的刚体转动, 因此只须确定刚体平动位移系数  $d_1$ 、 $d_2$  即可.

### 4.2 法向边界条件和精确方程组

以  $x = 0$  边界为例. 设  $x = 0$  为法向自由边, 引用边界条件:  $x = 0$  时  $\sigma_x = f_1(y)$ . 忽略零项后有

$$\left[ \frac{\partial^2 \phi_{1y}}{\partial y^2} \right]_{x=0} = f_1(y) - \left[ \frac{\partial^2 \phi_{21x}}{\partial y^2} \right]_{x=0} \quad (26)$$

$\phi_{1y}$  和  $\phi_{21x}$  有相同的级数类型, 将  $f_1(y)$  对该级数展开后, 式 (26) 右端项一定为零, 利用  $\phi_{1y}$  中的级数正交性得求解待定系数的线性方程. 该方程左端项没有一个级数的展开系数, 右端项为零值, 笔者称精确方程. 法向位移边界条件也对应一组精确方程.

引用法向边界条件后, 矩形边界平面问题均可得  $m > 0$  和  $n > 0$  时 4 组精确方程; 当平面问题存在二对边法向支承边界时, 例图 2(c)、(e)、(f) 所示的平面问题还可确定  $C_0$ 、 $D_0$  和  $G_0$ 、 $H_0$  值.

### 4.3 切向边界条件和多余方程

边界切向面力或位移条件对应方程中级数类型发生改变, 改变后的级数与应力函数中的原级数为一阶微分关系. 现以  $x = 0$  或  $x = a$  边界为例, 如果应力函数中原级数为  $\sum_{n=1,2,3} \sin \beta y$ ,  $\beta = \frac{n\pi}{b}$ , 方程中现级数为  $\sum_{n=1,2,3} \cos \beta y$ , 整数  $n$  取值仍从 1 开始. 此时要将式中非  $\cos \beta y$  函数在  $[0, b]$  区间上对级数  $\sum_{n=0,1,2} \cos \beta y$  展开,  $n$  的取值要从零开始. 利用级数的正交性得  $n = 0$  时的一个方程和  $n > 0$  时一组方程. 后者称求解待定系数的有效方程; 前者称多余方程, 它对应边界常量剪应力或常量切向位移关系.

如果原级数为  $\sum_{n=0,1,2} \cos \beta y$ , 现变为  $\sum_{n=1,2} \sin \beta y$ ,  $n$  的取值要从 1 开始. 将式中非  $\sin \beta y$  函数在  $[0, b]$  区间上对现级数展开时, 端点函数值不必单列. 原级数为  $\sum_{n=1,3,5} \sin \beta y$  或  $\sum_{n=1,3,5} \cos \beta y$  也是如此处理.

引用切向边界条件可得  $m > 0$  和  $n > 0$  时 4 组有效方程组. 对图 2(a) 所示的平面问题, 还可得  $m = 0$  和  $n = 0$  时 4 个多余方程; 对图 2(b)、(c) 所示平面问题, 可得 2 个多余方程; 对图 2(d)、(e)、(f) 所示平面问题, 没有多余方程.

利用 4 组精确方程、4 组有效方程和 1 个多余方程可以求解  $m > 0$  和  $n > 0$  时的 8 组待定系数和待定常数  $\tau_0$  值, 其余多余方程均为恒等式.

## 5 算例

图 2(a) 所示简支深梁, 承受均布荷载  $q$ , 表 1 列出  $x = 0.5a$  截面上分布的正应力 (剪应力  $\tau_{xy} = 0$ ). 计算时, 取  $a = b = 1.0$ ,  $\mu = 0.3$ ,  $E = 1.0$  (后例同) 和  $q = 1$ .  $\phi_1$  中级数取前 9 项,  $\phi_{21}$  和角点集中力解中级数取前 100 项. 与有限元方法相比 (采用  $16 \times 16$  四边八结点等参元<sup>[8]</sup>), 二者结果是非常相近的.

图 2(b) 所示悬臂结构, 承受水平均布力  $q$ , 设  $y = b$  边界上切向和法向位移均为零值, 取  $q = 1$ .  $\phi_1$  取级数前 8 项,  $\phi_2$  取级数前 25 项. 表 2 列出  $y = 0.5b$  截面上弯曲正应力  $\sigma_y$  和剪应力  $\tau_{xy}$ . 本文方法与有限元法结果相近. 与之相比, 半逆解法结果有些差异, 这是因为半逆解法仅能满足边界中点处位移条件.

表 1 深梁承受均布力

Tab.1 Deep beam under uniform load

计算点		本文方法		有限元方法	
$x/a$	$y/b$	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\sigma_x$	$\sigma_y$
0.5	0	-0.224	-0.996	-0.272	-1.004
0.5	0.125	-0.223	-0.957	-0.226	-0.961
0.5	0.250	-0.275	-0.852	-0.280	-0.854
0.5	0.375	-0.373	-0.681	-0.379	-0.681
0.5	0.500	-0.454	-0.436	-0.461	-0.433
0.5	0.625	-0.397	-0.150	-0.400	-0.139
0.5	0.750	0.009	0.070	0.017	0.084
0.5	0.875	0.893	0.123	0.928	0.089
0.5	1.000	3.121	0.002	1.997	-0.009

图 2(c) 所示平面问题, 在  $y = 0$  和  $y = b$  边界上作用均布荷载  $q$ . 设法向支承边和点支座位移为零值, 得  $\phi = \frac{q}{2}(\mu y^2 + x^2)$ , 与理论解相同.

图2(d)所示的平面问题,  $y = 0$  和  $x = 0$  边界上分别作用均布荷载  $q_1, q_2$ ,  $x = a$  和  $y = b$  边界上法向位移为零值. 得  $\phi = (q_1 x^2 + q_2 y^2)/2$ , 与理论解相同.

表2 悬臂构件承受水平均布力

Tab.2 Cantilever member under horizontal uniform load

计算点		本文方法		有限元方法		半逆解法	
$x/a$	$y/b$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$	$\sigma_y$	$\tau_{xy}$
0	0.5	0.456	-0.098	0.442	-0.001	0.55	0
0.25	0.5	0.471	-0.553	0.470	-0.556	0.463	-0.563
0.5	0.5	0.032	-0.748	0.032	-0.750	0	-0.75
0.75	0.5	-0.446	-0.577	-0.445	-0.580	-0.463	-0.563
1.0	0.5	-0.616	-0.050	-0.618	-0.003	-0.55	0

图2(e)所示平面问题,  $y = 0$  边界上作用均布荷载  $q$ , 所有法向位移均为零. 得  $\phi = q(x^2 + \mu y^2)/2$ , 与理论解相同.

对图2(f)所示的平面问题,  $x = a$  边界法向位移为  $u = \frac{(b - 2y)a_1}{b}$ , 本文结果与有限元值十分相近.

## 参考文献:

- [1] 徐芝纶. 弹性力学:上册[M]. 2版. 北京:高等教育出版社,1982.
- [2] 吴家龙. 弹性力学[M]. 北京:高等教育出版社,2001.
- [3] PODIO-GUIDUGLI P. A primer in elasticity [J]. Elasticity, 2000, 58(1): 1-104.
- [4] 许琪楼. 二对边法向支承矩形边界平面问题新解法[J]. 工程力学, 2009, 26(2): 33-41.
- [5] 许琪楼, 姬同庚. 一边固定一角点支承的矩形板在均布荷载作用下的弯曲解[J]. 应用数学和力学, 1996, 17(12): 1091-1100.
- [6] XU Qi-lou, JI Tong-geng, JIANG Rui. Unified solution method of rectangular plate bending [J]. Journal of Southeast University: English Edition, 2002, 18(3): 241-248.
- [7] 许琪楼, 王海. 板柱结构矩形弹性板弯曲精确解法[J]. 工程力学, 2006, 23(3): 76-81.
- [8] 薛守义. 有限单元法[M]. 北京:中国建材工业出版社, 2005.

## Stress Solution for Plane Problem with Rectangular Boundary Under Boundary Condition Action

XU Qi-lou

(College of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

**Abstract:** The plane problem stress solution of boundary condition is the classical bi-harmonic equation solution and consists of the homogeneous solution and particular solution. The stress function homogeneous solution is the bi-directional single trigonometric series including eight undetermined coefficients in correspondence with the eight boundary conditions. The curve form of the series must be in accord with the intrinsic character of the normal surface force and normal displacement at the edges. There are three particular solutions: it is the normal surface force, normal edge displacement and edge constant shear stress. Translating different the surface force and the displacement into the form of series, and using the given regulations construct the first two particular solutions form. The third particular solution may be not considered under the specified boundary conditions. The stress function solution has 16 kinds of expression with the change of edge normal supported condition; it can solve the 256 types of plane problem with rectangular boundary. In this paper, the particular solutions of common boundary condition are presented, some problems in the evaluation process are discussed and some examples are provided.

**Key words:** elasticity; plane problem; bi-harmonic equation; stress function homogenous solution; stress function particular solution