

文章编号:1671-6833(2010)06-0014-05

基于七点估计法的边坡稳定可靠度求解

苏永华, 王奇山, 梁 斌

(湖南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410082)

摘 要: 分析了确定统计矩多点估计理论的点位置和相应加权系数的 Gauss-Hermit 数值积分原理, 以适于任意滑面的毕肖普模式为例, 研究了极限平衡理论中边坡稳定可靠度极限状态方程的特点和复杂性. 引进多变量函数近似单变量化方法, 将边坡极限状态方程转化为适于点估计分析要求, 在此基础上构建了边坡稳定可靠度的多点估计分析方法并研究了其具体的操作步骤. 通过三个典型实例, 将结果与经典的精确方法结果进行比较, 显示所研究方法计算代价仅为经典方法的 0.01%, 而计算的准确度基本相当, 显示了该方法的实用性和简便性.

关键词: 边坡稳定性; 极限平衡模式; 可靠度; 多点估计法

中图分类号: TU443

文献标识码: A

0 引言

设不确定性结构基本变量为 X_1, X_2, \dots, X_n , 用向量形式表达为 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, 相应的联合概率密度函数为 $f_X = f_X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 功能函数为 $Z = g(X) = g(X_1, X_2, \dots, X_n)$. 则结构的失效概率 p_f , 可靠概率 p_r 为:

$$p_r = 1 - p_f = 1 - P \int_{Z < 0} \dots \int f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (1)$$

对于式(1)的计算, 根据 $g(X)$ 的具体表达式, 可以直接积分. 也可以选用蒙特卡洛模拟法、一次二阶矩法、多次多阶矩法、点估计法及随机有限元法^[1]. 直接积分是准确方法, 但实际结构基本变量多, 功能函数复杂, 实现起来很困难. 蒙特卡洛法计算精确度高, 但需要大量抽样, 计算代价太高, 通常用于准确性验证分析. 一次二阶矩法只有在基本参数变异系数不大的情况下, 才具有较高精度. 为了提高计算准确度, 有文献采用随机变量的三阶矩和四阶矩, 但理论深奥、分析过程复杂, 实际应用困难. 随机有限元方法在理论上是一种很好的方法, 但需要依靠专用软件, 而且要求分析人员需要有比较丰富的经验. 由 Rosenblueth 创立的统计矩点估计法, 概念比较明确, 计算过程清晰.

点估计法又称作 Rosenblueth 法, 最早由 Rosenblueth^[2] 提出, 该法只要利用状态变量的均值和方差, 不需了解各种状态变量的概率分布, 就可以求得可靠度指标, 还可以在状态函数值的假定概率分布下求出失效概率. Gorman^[3] 和 Li^[4] 等人分别在此基础上提出了各自的三点估计理论, 但是由于估计点个数少, 精度低, 并且在计算过程中估计点可能超出随机变量的定义域, 在实际工程中未能得到广泛的应用. Christian 等^[5] 指出 Rosenblueth 的点估计理论在本质上与 Gauss-Hermit 的数值积分是一致的, 这为多点估计方法的应用提供了理论基础. 提高点估计法精度的最根本的办法是增加估计点的数目, Zhao Y G^[6] 提出了一种实用性和精度大大提高的点估计法, 指出近似随机变量的高阶矩的过程中, 要使误差减小, 需要更多估计点. 苏永华等^[7] 曾采用两点估计法简化的响应面法对某一工程的稳定可靠性进行计算. 张仪萍^[8] 研究了竖井地基固结概率的五点估计法. 笔者试图利用点估计方法的最新进展^[6], 以边坡极限平衡理论中的典型模式为例, 为复杂的边坡可靠度问题探讨一种简便、精确的计算方法.

1 基于数值积分定点的多点估计法

点估计法在计算函数的各阶矩时要求随机变

收稿日期:2010-06-30; 修订日期:2010-08-03

基金项目:湖南省自然科学基金资助项目(09JJ3113); 湖南省交通厅科技项目(200717)

作者简介:苏永华(1966-), 男, 湖南涟源人, 湖南大学教授, 博士, 主要从事岩石力学及地下结构非确定性优化设计方面的教学与研究工作, E-mail: yong_su1965@126.com.

量服从标准状态分布且线性无关,而实际上随机变量的分布形式是多样的.因此,首先需要将任意分布的变量 Z 转换为线性无关的标准正态变量 X . 作者利用 Rosenblatt^[9] 变换 $X = T(Z)$ 来实现这一转变.以 X 为单随机变量为例介绍转换及估计计算所采用点的确定方法.

对于一维随机变量 X ,其密度函数:

$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (2)$$

令 $y = g(x)$, 则 y 的均值 μ_y 和 k 阶中心矩 $M_{y,k}$ 可写成如下形式:

$$\mu_y = \int g(z) f(x) dx \quad (3)$$

$$M_{y,k} = \int (g(z) - \mu_y)^k f(x) dx, k \geq 2 \quad (4)$$

由于 $g(x)$ 往往是高度非线性或隐式的函数,式(3),(4)解析解很难得到.令 $y = T^{-1}(x)$ 为 Rosenblatt 逆变换,则(3),(4)式可写为:

$$\mu_y = \int g[T^{-1}(x)] f(x) dx \quad (5)$$

$$M_{y,k} = \int (g[T^{-1}(x)] - \mu_y)^k f(x) dx, k \geq 2 \quad (6)$$

Gauss - Hermit 积分公式^[14]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \exp(-t^2) dt = \sum_{i=1}^m \omega_i F(t_i) \quad (7)$$

式中: m 为估计点个数,式(6)是全无穷区间上的高斯型求积公式,其中节点 $t_i (i=0, 1, \dots, n)$ 为

$(-\infty, +\infty)$ 上带权 $\rho(t) = \exp(-t^2)$ 的正交 $n+1$ 次埃尔米特多项式(8)的零点,系数 ω_i 可通过(9)式确定:

$$H_{n+1}(t) = (-1)^{n+1} \exp(t^2) \frac{d^{n+1} \exp(-t^2)}{dt^{n+1}} \quad (8)$$

$$\omega_i = \frac{2^{n+2} (n+1)! \sqrt{\pi}}{[H'_{n+1}(t_i)]^2} \quad (9)$$

其截断误差为

$$R[f] = \frac{(n+1)! \sqrt{\pi}}{2^{n+1} (2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi), \xi \in \{-\infty, +\infty\} \quad (10)$$

高斯求积公式系数 ω_i 必然满足:

$$\begin{cases} \int \rho(t) dt = \sum_{i=0}^n \omega_i \\ \int \rho(t) t dt = \sum_{i=0}^n \omega_i t_i \\ \dots \\ \int \rho(t) t^n dt = \sum_{i=0}^n \omega_i t_i^n \end{cases} \quad (11)$$

u_i 为第 i 个估计点值, P_i 为第 i 个估计点 t_i 所对应的权重,并且有

$$u_i = \sqrt{2} t_i, P_i = \omega_i / \sqrt{\pi} \quad (12)$$

通过式(8),(9),(11),(12)可以确定出七点估计法数值积分^[10]中估计点 u_i 和其相应的权变量 P_i 如表1.

表1 七点估计法中各点的位置及权重

Tab.1 The location of the points and weights of 7 point estimate method

估计点序号	1	2	3	4	5	6	7
估计点位置 u_i	3.750 437 9	2.366 759 4	1.154 405 4	0	1.154 405 4	2.366 759 4	3.750 437 9
估计点权值 P_i	0.000 548 3	0.030 757 1	0.240 123 3	0.457 142 6	0.240 123 3	0.030 757 1	0.000 548 3

因此通过 Gauss - Hermit 求积可将式(5)、(6)转换为式(13)、(14):

$$\mu_y = \sum_{i=1}^m P_i g[T^{-1}(x)] \quad (13)$$

$$M_{y,k} = \sum_{i=1}^m P_i (g[T^{-1}(x)] - \mu_y)^k, k \geq 2 \quad (14)$$

由状态函数的一阶矩 μ_g 和二阶矩 $(\sigma_g)^2$ 可求得可靠度指标 $\beta = \mu_g / \sigma_g$, 进而可计算出破坏概率 $p_f = 1 - \Phi(\beta)$.

2 基于极限平衡的边坡状态方程

岩土边坡的稳定性分析方法经过长期的发展,已经产生了很多方法.极限平衡法是其中最为重要和成熟的理论之一^[11].在众多极限平衡理论中,适应于任意滑动面的毕肖普模式具有典型代

表性^[12].该法适用于非圆弧滑面,其条分形式如图1所示,其稳定性系数 F 按式(15)计算.

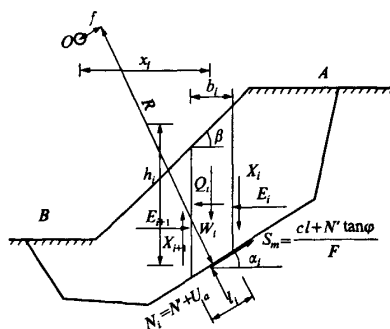


图1 适于任意滑动面的毕肖普计算简图

Fig.1 Calculation diagram of extended simplified Bishop method

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n (cl + N'_i \tan \varphi) R}{\sum_{i=1}^n Wx_i - \sum_{i=1}^n (N'_i + U_a) f} \quad (15)$$

$$N'_i = \frac{1}{m_a} \left[W - \frac{cc \cos \alpha}{F} - U_a \cos \alpha \right] \quad (16)$$

$$m_a = \cos \alpha \left[1 + \frac{\tan \alpha \tan \varphi}{F} \right] \quad (17)$$

式中: $\alpha_i, l_i, N'_i, N', S_m, U_a, c$ 和 φ 分别为第 i 根土条底边的倾角、滑面长度、法向力、有效法向力、土条底边抗剪力、孔隙水压力、黏聚力和内摩擦角; β 为土条顶边倾角; h_i, b_i, W_i, Q_i, f 和 x_i 分别为第 i 根土条的平均高度、宽度、重力、水平作用力、底边法向力力臂和土条重力力臂; R 为条底切向力的转动半径; E 为土条间的法向作用力; X 为土条间的切向作用力; 下标 i 和 $i+1$ 分别表示第 i 根土条右边和左边的作用力; F 为安全系数。

根据可靠度分析流程与结构状态方程建立方法, 可以根据式(15)得到边坡的相应极限状态方程为:

$$G(x) = F - 1 = \frac{\sum (c_i + N'_i \tan \varphi_i) R}{\sum W_i x_i - \sum (N'_i + U_a) f} - 1 = 0 \quad (18)$$

很显然, 边坡极限状态方程式(18)在绝大多数情况下是多自变量函数, 同时是隐式的。因此极限状态方程是多随机变量的非线性复杂函数。有关研究文献^[13]显示, 极限平衡理论边坡各模式的可靠度状态方程均具有上述同样的特征。

3 边坡稳定可靠度的多点估计法

边坡稳定状态方程 $G(X)$ 是包含多个随机变量的函数, 其中 $X = X_1, X_2, \dots, X_n$, 其联合概率密度由 n 个随机变量定义在 kn 维空间超立方体上, 其中 k 为单变量函数估计点数目, 当 n 很大时, 估计点数目 k^n 也相当大^[6]。采用 Tetsuro^[6] 等提出的多变量函数转单变量方法, 将 $G(X)$ 通过式(19)近似计算:

$$G(X) \approx G'(X) = \sum_{i=1}^n (G_i - G_\mu) + G_\mu \quad (19)$$

其中, $G_i = G[T^{-1}(X_i)]$, $X_i = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n\}$, 即除 x_i 外, 其余随机变量全为其均值; G_μ 为所有变量 x_i 全为均值时的函数值。则 $G(X)$ 的均值和标准差分别为

$$\mu_G = \sum_{i=1}^n (\mu_i - G_\mu) + G_\mu \quad (20)$$

$$\sigma_G^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad (21)$$

式中: μ_i, σ_i^2 分别为 G_i 的均值和标准差。

因此基于极限平衡理论模式的边坡稳定可靠度, 采用点估计法计算时, 基本步骤如下:

①根据边坡地质体组成, 确定基本随机变量 $X = X_1, X_2, \dots, X_n$ 及其分布形式; ②根据滑面形式确定边坡稳定性分析模式及其系数计算表达式(15); ③利用稳定性系数表达式建立极限状态方程(18); ④将多变量的稳定性系数近似化为单变量计算形式(19); ⑤利用数值积分原理确定各变量的估计点位置和权重; ⑥采用式(13), (14)确定各单变量情况下的均值和方差; ⑦采用式(20), (21)确定极限状态函数的均值和方差; ⑧根据极限状态方程均值和方差计算可靠度指标和失效概率。

4 实例与验证

算例 1 和算例 2 分别选自文献[11]中 1987 年澳大利亚计算机应用协会(ACADS)对澳大利亚所使用的边坡稳定分析程序进行的一次调查中的考核题例 1(a)和例题 1(c), 边坡的外形及各土层的分布情况分别如图 2 和图 3 所示; 例题 1 土层的物理力学指标黏聚力 c 、内摩擦角 φ 和重度 γ 的标准值分别为: 3.0 kN/m^2 , 19.6° 和 20 kN/m^3 , 例题 2 各土层的物理力学指标如表 2 所示。

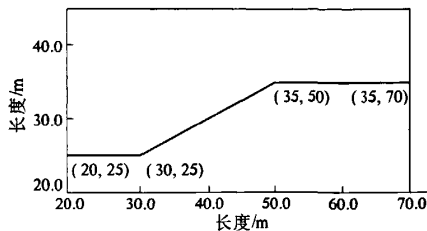


图 2 ACADS 的考核题 1(a)

Fig. 2 The examination questions 1(a) of ACADS

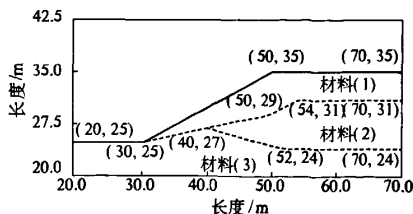


图 3 ACADS 的考核题 1(c)

Fig. 3 The examination questions 1(c) of ACADS

表2 考核题1(c)的材料性质
Tab.2 The material properties of examination questions 1(c)

土号	$c/$ ($\text{kN} \cdot \text{m}^{-2}$)	$\varphi/$ ($^{\circ}$)	$\gamma/$ ($\text{kN} \cdot \text{m}^{-3}$)	$E/$ ($\text{kN} \cdot \text{m}^{-2}$)	ν
1 [#] 土	0.0	38.0	19.5	10 000	0.25
2 [#] 土	5.3	23.0	19.5	10 000	0.25
3 [#] 土	7.2	20.0	19.5	10 000	0.25

算例3选自文献[14],边坡的外形及各土层的分布情况如图4所示,各土层的物理力学指标黏聚力 c 和内摩擦角 φ 服从正态分布,平均值和均方差如表3所示,重度 γ 为定值 19 kN/m^3 。

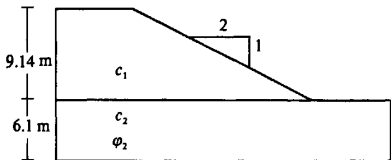


图4 边坡的外形及各土层分布情况
Fig.4 Slope shape and the distribution of soil

例题1和例题2的物理力学指标 c, φ 服从标准正态分布,变异系数 δ 分别为0.2和0.1, γ 为常量,均方差为0,假定例题2的弹性模量 E ,泊松比 ν 为常量,通过多点估计法和100万次的蒙特卡洛模拟,结果如表4所示。相对于蒙特卡洛法的100万次边坡极限状态计算,点估计法仅需14次。

表3 例题3的材料性质
Tab.3 The material properties of example 3

参数	$\varphi_1/$ ($^{\circ}$)	$\varphi_2/$ ($^{\circ}$)	$c_1/$ ($\text{kN} \cdot \text{m}^{-2}$)	$c_2/$ ($\text{kN} \cdot \text{m}^{-2}$)
平均值	0	12	38.31	23.94
均方差	—	1.2	7.66	4.79

表4 点估计法和蒙特卡洛方法计算结果比较
Tab.4 Comparison of calculation results between PEM and Monte Carlo methods

算例	安全系数	点估计法 可靠度/%	蒙特卡洛 模拟法 可靠度/%	相对 误差/ %	绝对 误差/ %
例题1	0.985 6	44.35	45.34	2.18	0.99
例题2	1.403 1	99.74	98.86	0.89	0.88

例题3的计算结果和参考文献[14]中B. Xu和B. K. Low的有限元算法的计算结果以及100万次蒙特卡洛模拟结果如表5所示,相对于蒙特卡洛法的100万次边坡极限状态计算,五点法需计算10次,七点估计法需计算14次。

表5 点估计法、有限元法和蒙特卡洛方法计算结果比较
Tab.5 Comparison of calculation results among PEM, FEM and Monte Carlo methods

计算方法	安全系数	可靠度指标	可靠度/%	绝对误差/%	相对误差/%
有限元法	1.646	2.18	98.54	0.04	0.04
七点估计法	1.637	2.45	99.30	0.80	0.81
五点估计法	1.637	2.47	99.32	0.82	0.82
蒙特卡洛	—	—	98.50	—	—

5 结论

(1)分析了多点估计法的点位置及相应加权系数确定的 Gauss - Hermit 数值积分原理。

(2)研究了边坡稳定性分析的极限平衡模式导出的极限状态方程的特点,指出了该类极限状态方程形式的隐含和多变量特性。

(3)以适于任意滑面的毕肖普模式为例,引入多变量函数的近似单变量化方法,提出了边坡极限平衡模式下边坡稳定可靠度的多点估计法,并给出了具体的分析计算操作步骤。

(4)进行了多个实例研究及比较,显示笔者研究所得方法计算工作量约为经典方法的0.01%,而分析结果的准确性基本与之相当。

参考文献:

[1] 赵国藩,金伟良,贡金鑫.结构可靠度理论[M].北京:中国建筑工业出版社,2000.
[2] ROSENBLUETH E. Point estimates for probability moments [J]. Proc Nat Acad of Sci, 1975, 72 (10): 3812 - 3814.
[3] GORMAN M R. Reliability of structural systems [D]. Cleveland: Case Western Reserve University, 1980.
[4] LI K S. Point - estimate method for calculating statistical moments [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1992, 118 (7): 1506 - 1511.
[5] CHRISTIAN J T, BAECHE G B. Point - estimate method as numerical quadrature [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1999, 125 (9): 779 - 786.
[6] ZHAO Y G, ONO T. New point estimates for probability moments [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2000, 126 (4): 433 - 436.
[7] 苏永华,何满朝,高谦. Rosenblueth 方法在软破围岩锚喷支护系统评价中的应用[J]. 岩土工程学报, 2004, 26 (3): 378 - 382.
[8] 张仪萍,李涛,王伟. 竖井地基固结概率分析的点估计法[J]. 岩土工程学报, 2007, 29 (9): 1367 - 1371.
[9] ROSENBLATT M. Remarks on a multivariate transform

- mation [J]. *Annals of Math. Stat.*, 1952, 23(3): 470 - 472.
- [10] 封建湖, 车刚明, 聂玉峰. 数值分析原理[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [11] 陈祖煜. 土质边坡稳定分析 - 原理方法程序[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2003.
- [12] 张鲁渝, 郑颖人. 简化 Bishop 法的扩展及其在非圆弧滑面中的应用[J]. *岩土力学*, 2004, 25(6): 927 - 929.
- [13] 苏永华, 赵明华, 李青海, 等. 稳定性系数为隐式函数的边坡可靠度近似计算方法[J]. *岩土工程学报*, 2006, 28(10): 1198 - 1204.
- [14] XU B, LOW B K. Probabilistic stability analyses of embankments based on finite element method[J]. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2006, 132(11): 1444 - 1454.

Reliability Solving of Slope Stability Based on 7 Point Estimation Method

SU Yong - hua, WANG Qi - shan, LIANG Bin

(College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract: The location of estimating point involving the theory of multi - point estimate for the determination of statistical moments, and the corresponding weighting coefficients in Gauss - Hermit quadrature formula are both analyzed. The characteristics and complexity of the limit state function required in slope reliability problem within the context of the limit equilibrium theory are investigated by employing the Bishop method of slices that is applicable to any slip surfaces. Introducing the method of multivariate function estimation for the issue of single variable approximation, the limit state function can then be transformed into the form fulfilling the requirement of point estimate method. On this basis, a multi - point estimate algorithm for reliability analysis of slope is developed and the associated scheme for such an algorithm is also provided in detail. This proposed methodology is then applied to the comparison of its results with those obtained from the traditionally exact approach by use of three typically practical examples. The comparison reveals that the computation efficiency of the current algorithm is only 0.01% of that in the classical approach, whereas the precision is almost equivalent between both, thus verifying the applicability and simplicity of the present methodology.

Key words: slope stability; limit equilibrium mode; reliability; multi - point estimate method