文章编号:1671 - 6833(2010)05 - 0121 - 04

关于自反 Banach 空间框架下的连续伪压缩映象

孙利娟

(开封教育学院 计算机系,河南 开封 475000)

摘 要: 考虑了一类含有连续强伪压缩映象的粘滞迭代隐性算法. 在自反的 Banach 空间框架下,基于迭代方法针对满足弱嵌入条件的连续伪压缩非自映象,建立了不动点序列的强收敛定理,并证明了该不动点恰为某一非线性变分不等式的唯一解. 所得结果改进了 Moudafi 的含有压缩映象的粘滞迭代隐性算法,并把其空间框架从实 Hilbert 空间推广到了自反的实 Banach 空间.

关键词: Banach 极限;非扩张映象;伪压缩;变分不等式

中图分类号: O177.91 **文献标识码**: A

0 引言

设 E 是一实 Banach 空间,正规对偶映象 $J:E\to 2^{E^*}$ 定义为

$$J(x)=\{f\in E^*:\langle x,f\rangle=\|x\|^2=\|f\|^2\},x\in E.$$

其中 E^* 为 E 的对偶空间,$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 表示广义对偶对. 一般的,我们用 j 表示单值正规对偶映象. 设 C 是 E 的一非空闭凸子集,$T:C\to C$ 是一非线性映象. 记 T 的不动点集为 $F(T)$. 回顾如下定义:

(a) 称 T 为非扩张的,如果

$$\|Tx-Ty\|\leqslant\|x-y\|,\ \forall x,y\in C.$$

(b) 称 T 为严格伪压缩的,如果存在常数 $\lambda\in(0,1)$,使得

$$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\leqslant\|x-y\|^2-\lambda\|(I-T)x-(I-T)y\|^2,\ \forall x,y\in C,$$

其中,$j(x-y)\in J(x-y)$.

(c) 称 T 为强伪压缩,如果存在某一常数 $k\in(0,1)$,使得

$$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\leqslant k\|x-y\|^2,\ \forall x,y\in C,$$

其中,$j(x-y)\in J(x-y)$.

(d) 称 T 为伪压缩的,如果

$$\langle Tx-Ty,j(x-y)\rangle\leqslant\|x-y\|^2,\forall x,y\in C,$$

其中,$j(x-y)\in J(x-y)$.

显然,严格伪压缩映象是介于非扩张映象和伪压缩映象之间的一类非线性映象. 伪压缩映象是一类非常重要的非线性映象,在过去的几十年中,许多学者对伪压缩映象不动点的存在性和迭代算法的收敛性进行了大量的研究[1].

1965 年,Browder[2] 在 Hilbert 空间的框架下,首先建立次连续伪压缩映象不动点的存在性结果. 他证明了如下定理:

定理 B 设 H 是一实 Hilbert 空间,C 是 H 的一非空闭凸子集,$T:C\to C$ 是一次连续的伪压缩映象,则 T 在 C 中有一个不动点.

1974 年,Demling[3] 在实 Banach 空间的框架下,得到了连续强伪压缩映象不动点的存在性结果. 他证明了如下经典定理:

定理 D 设 E 是一实 Banach 空间,C 是 E 的一非空闭凸子集,$T:C\to C$ 是一连续的强伪压缩映象,则 T 在 C 中有唯一不动点.

最近,Zhou[4] 考虑了用凸组合的方法来研究严格伪压缩映象. 更准确的描述为: 定义一映象 $T_t:C\to C$ 如下:

$$T_tx=tx+(1-t)Tx,\ \forall x\in C,$$

其中,$t\in(0,1)$,$T:C\to C$ 是一严格伪压缩映象. 在适当限制参数 t 的条件下,他证明了 T_t 是一非扩张映象.

正则化方法是研究非扩张映象的一类有效和常用方法. 更详细的描述即为利用 Banach 压缩映象原理. 令 $t\in(0,1)$,定义一压缩 $T_t:C\to C$ 如下:

$$T_tx=tu+(1-t)Tx,\ \forall x\in C,$$

其中,$u\in C$ 是一定点. Banach 压缩映象原理保证了 T_t 有唯一不动点 $x_t\in C$. 在假设映象 T 不动点集非空的情况下,Browder[5] 证明了如果 E 是一

收稿日期:2010 - 04 - 07;**修订日期**:2010 - 06 - 27

作者简介:孙利娟(1974 -),女,河南尉氏人,开封教育学院讲师,硕士,研究方向为多媒体技术,E-mail:kfslj2007@163.com.

Hilbert空间,那么 x_t 强收敛到 T 的某一不动点,而这一不动点恰为固定点 u 在不动点集上的投影点. Reich[6]把Browder的结果从Hilbert空间推广到了Banach空间,并证明了如果 E 是一致光滑的Banach空间,那么 x_t 强收敛到 T 的某一不动点,并用此极限定义了从 C 到 $F(T)$ 太阳非扩张收缩. Lan和Wu[7]在Hilbert空间框架下探讨了次连续伪压缩映像路径的收敛性问题. 在文献[8]中,Xu进一步推广了Browder的结果. 他证明了如果 E 是自反的且具有弱连续对偶映象,那么Browder的结果是仍然成立的.

最近,Xu[9]考虑了所谓的粘滞逼近方法,这个方法最早由Moudafi[10]在Hilbert空间的框架下提出. Xu具体的证明了如下定理:

定理X 设 E 是一致光滑的Banach空间,C 是 E 的一非空闭凸子集,$T:C\to C$ 是一具有非空不动点集合的非扩张映象,$f\in\prod_C$,其中 $\prod_C$ 是 C 上的压缩映像做成的集合. 序列 $\{x_t\}$ 强收敛于 $F(T)$ 中的一点. 如果我们定义 $Q:\prod_C\to F(T)$ 如下:$Q(f)=\lim\limits_{t\to 0}x_t,\ f\in\prod_C$. 则 $Q(f)$ 是如下变分不等式的解:

$$\langle (I-f)Q(f),J(Q(f)-p)\rangle\leqslant 0,$$
$$f\in\prod{}_C,\ p\in F(T).$$

最近,Chen,Lin和Song[11]进一步研究了严格伪压缩自映象. 具体的,他们得到了如下结果:

定理CLS 设 C 是 q-一致光滑的Banach空间的一非空闭凸子集,$T:C\to C$ 是一具有非空不动点集合的严格伪压缩映象,$f:C\to C$ 是一Lipschitz强伪压缩映象. 对任意 $t\in(0,1)$,令 x_t 是 $tf+(1-t)T$ 的唯一不动点. 则当 $t\to 0$ 时,$\{x_t\}$ 强收敛于 T 的一不动点 p.

受Xu[9]和Chen,Lin和Song[11]等工作的启发,笔者在具有一致Gateaux可微范数的实自反Banach空间框架下,考虑了连续伪压缩非自映象的路径收敛性问题,所得结果改进和推广了前期许多研究者已得到的相应结果.

1 预备知识

设 C 是Banach空间 E 的一非空闭凸子集,对于 $x\in C$,x 的嵌入集 $I_C(x)$ 定义为:

$$I_C(x)=\{x+\lambda(u-x),u\in C,\lambda\geqslant 0\}.$$

映象 $T:C\to E$ 称为弱嵌入的,如果对任意的 $x\in C$,有 $Tx\in\overline{I_C(x)}$,其中 $\overline{I_C(x)}$ 表示弱嵌集的闭包. 显然每个自映象都是弱嵌入的.

设 μ 是 l^∞ 上的连续线性泛函,$(a_0,a_1,k)\in l^\infty$. 我们用 $\mu_n(a_n)$ 表示 $\mu_n((a_0,a_1,k))$. 称 μ 是Banach极限,如果 μ 满足 $\|\mu\|=\mu_n(1)=1$,$\mu_n(a_n)=\mu_n(a_{n+1})$,$(a_0,a_1,k)\in l^\infty$. 如果 μ 是Banach极限,则下式成立:

$$\varliminf_{n\to\infty}\ \inf a_n\leqslant\mu(a_n)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}\ \sup a_n.$$

设 $S=(0,1)$,$B(S)$ 是 S 上具有上确界范数的所有有界实值函数所构成的Banach空间.

引理1.1[12] 设 C 是Banach空间 E 的一非空闭凸子集,E 的范数是一致Gateaux可微的,$\{x_t\}$ 有界,$x\in C$,μ_t 是 E 上的Banach极限,则

$$\mu_t\|x_t-z\|=\min\nolimits_{y\in C}\|x_t-y\|,$$

当且仅当

$$\mu_t\langle y-z,j(x_t-z)\rangle\leqslant 0,\ \forall y\in C.$$

引理1.2 设 C 是Banach空间 E 的一非空闭凸子集,$T:C\to E$ 是一连续的伪压缩. 假设 T 满足弱嵌入条件,则 $C\subseteq(2I-T)^{-1}C$. 若定义 $G:C\to C$ 如下:

$G(x)=(2I-T)^{-1}x,\ \forall x\in C$. 则 $G:C\to C$ 是非扩张的,$F(G)=F(T)$,且 $\|x-G(x)\|\leqslant\|x-Tx\|,\ \forall x\in C$.

证明 对任意的 $\mu_t\in C$ 定义映象 $U:C\to E$ 如下:$Ux=\dfrac{1}{2}u+\dfrac{1}{2}Tx,\ \forall x\in C$. 因为 $T:C\to E$ 是连续伪压缩且满足弱嵌入条件的,则 $U:C\to E$ 是连续强伪压缩且满足弱嵌入条件的,利用Demling[3]的推论1可得 U 具有唯一不动点 $x\in C$. 即 $x=\dfrac{1}{2}u+\dfrac{1}{2}Tx$. 因此,$u=(2I-T)x\in(2I-T)C$,于是 $C\subseteq(2I-T)C$. 由 G 的定义知:

$$\|(G(x)-G(y)\|=\|[I+(I-T)]^{-1}x-[I+(I-T)]^{-1}y)\|\leqslant\|x-y\|.$$

则 $G:C\to C$ 是非扩张的,且 $F(G)=F(T)$. 另一方面,有

$$\begin{aligned}\|x-G(x)\|&=\|GG^{-1}(x)-G(x)\|\\&\leqslant\|G^{-1}(x)-x\|\\&=\|x-Tx\|.\end{aligned}$$

引理证毕.

2 主要结果

定理2.1 设 E 是一实自反的Banach空间,且具有一致Gateaux可微范数,C 是 E 的一非空闭凸子集,$T:C\to E$ 是连续伪压缩的,$f:C\to C$ 是有界的,连续的,且具有系数 $k\in(0,1)$ 的强伪压缩映象. 假设 T 满足弱嵌入条件,C 的每个非空有界闭凸子集对于非扩张映象有不动点. 对于 $t\in(0,$

1),定义 T_t^f 如下:

$$T_t^f x = tf(x) + (1-t)Tx, \forall x \in C \quad (1)$$

则 $T_t^f x$ 有唯一不动点 $x_t \in C$ 如果 $F(T)$ 非空,则当 $t \to 0$ 时,$\{x_t\}$ 强收敛到 T 的不动点 p,p 也是如下变分不等式

$$\langle f(p) - p, j(y-p) \rangle \leqslant 0, \forall y \in F(T)$$

的唯一解.

证明　对任意 $x, y \in C$ 及 $t \in (0,1)$,有

$$\langle T_t^f x - T_t^f y, j(x-y) \rangle = t\langle f(x) - f(y), j(x-y) \rangle + (1-t)\langle Tx - Ty, j(x-y) \rangle \leqslant [1 - t(1-k)]\|x-y\|^2.$$

因此 $T_t^f: C \to E$ 是连续强伪压缩且满足弱嵌入条件的. 由 Demling[11] 的推论 1,对每个 $t \in (0,1)$,T_t^f 有唯一不动点 $x_t \in C$ 即,

$$x_t = tf(x_t) + (1-t)Tx_t \quad (2)$$

对于任意的 $p \in F(T)$ 有

$$\|x_t - p\|^2 = \langle x_t - p, j(x_t - p) \rangle = t\langle f(x_t) - f(p), j(x_t - p) \rangle + t\langle f(p) - p, j(x_t - p) \rangle + (1-t)\langle Tx_t - p, j(x_t - p) \rangle \leqslant [1 - t(1-k)]\|x_t - p\|^2 + t\langle f(p) - p, j(x_t - p) \rangle.$$

于是

$$\|x_t - p\|^2 \leqslant \frac{1}{1-k}\langle f(p) - p, j(x_t - p) \rangle \quad (3)$$

即

$$\|x_t - p\| \leqslant \frac{1}{1-k}\|f(p) - p\|, \forall t \in (0,1).$$

序列 $\{x_t\}$ 的有界性得证. 另一方面,由(2)得 $\|x_t - Tx_t\| = t\|f(x_t) - Tx_t\|$. 鉴于 $\{x_t\}$ 的有界性,得

$$\lim_{t \to 0}\|x_t - Tx_t\| = 0 \quad (4)$$

由引理 1.2 得 $\lim_{t \to 0}\|x_t - Gx_t\| = 0$,其中 $G = (2I - T)^{-1}$ 如引理 1.2 所定义. 定义一映象 A 如下: $Ay = \mu_t\|x_t - y\|, \forall y \in C$,其中 μ_t 是 Banach 极限. 令 $K = \{y \in C : Ay = \inf_{x \in C} Ax\}$ 则 K 是 C 的非空闭凸子集. 对于 $y \in K$,有

$$A(Gy) = \mu_t\|x_t - Gy\| = \mu_t\|Gx_t - Gy\| \leqslant Ay.$$

则 $Gy \in K$,即 $G(K) \subset K$. 注意假设条件: C 的每个非空有界闭凸子集对于非扩张映象有不动点,于是 G 在 K 中有一不动点 p. 由引理 1.2 知 $p = Tp$. 再由引理 1.1 得 $\mu_t\langle x - p, j(x_t - p) \rangle \leqslant 0, \forall x \in C$. 令 $x = f(p)$,则

$$\mu_t\langle f(p) - p, j(x_t - p) \rangle \leqslant 0. \quad (5)$$

结合(3)与(5)得 $\mu_t\|x_t - p\|^2 \leqslant 0$. 于是存在 $\{x_t\}$ 的某一子列 $\{x_{t_i}\}$,使得 $x_{t_i} \to P$,另一方面,由(2)对任意的 $x \in F(T)$ 有

$$\langle x_{t_i} - f(x_{t_i}), j(x_{t_i} - x) \rangle = (1-t_i)\langle Tx_{t_i} - f(x_{t_i}), j(x_{t_i} - x) \rangle = (1-t_i)\langle Tx_{t_i} - x_{t_i}, j(x_{t_i} - x) \rangle + (1-t_i)\langle x_{t_i} - f(x_{t_i}), j(x_{t_i} - x) \rangle \leqslant (1-t_i)\langle x_{t_i} - f(x_{t_i}), j(x_{t_i} - x) \rangle.$$

因此

$$\langle x_{t_i} - f(x_{t_i}), j(x_{t_i} - x) \rangle \leqslant 0, \forall x \in F(T) \quad (6)$$

取极限可得

$$\langle p - f(p), j(p - x) \rangle \leqslant 0, \forall x \in F(T) \quad (7)$$

假设存在 $\{x_t\}$ 的另一个子列 $\{x_{t_j}\}$ 使得 $x_{t_j} \to q$,则 q 也是 T 的不动点. 由(7)得

$$\langle p - f(p), j(p - q) \rangle \leqslant 0 \quad (8)$$

同理可证

$$\langle x_{t_j} - f(x_{t_j}), j(x_{t_j} - x) \rangle \leqslant 0, \forall x \in F(T).$$

即

$$\langle x_{t_j} - f(x_{t_j}), j(x_{t_j} - p) \rangle \leqslant 0 \quad (9)$$

取极限得

$$\langle q - f(q), j(q - p) \rangle \leqslant 0 \quad (10)$$

将(8)与(10)相加得

$$\langle p - q + f(p) - f(q), j(p - q) \rangle \leqslant 0.$$

由此可得

$$\|p - q\|^2 \leqslant \langle f(p) - f(q), j(p - q) \rangle \leqslant k\|p - q\|^2.$$

即 $p = q$. 这就证明了 $\{x_t\}$ 强收敛于 $p \in F(T)$,p 也是如下变分不等式的唯一解

$$\langle f(p) - p, j(y - p) \rangle \leqslant 0, \forall y \in F(T).$$

定理证毕.

注 2.1　如果 T 是自映象,那么可以去掉 T 满足弱嵌入条件的假设.

注 2.2　定理 2.1 在下面几个方面改进了第一节定理 CLS.

(a) 对空间:从 q -一致光滑的 Banach 空间到具有一致 Gateaux 可微范数的自反 Banach 空间;

(b) 对映象 T: ①从严格伪压缩到连续伪压缩; ②从自映象到非自映象;

(c) 对映象 f: 从 Lipschitz 强伪压缩到有界连续强伪压缩.

注 2.3　我们在定理 2.1 中得到了映象 T_t^f 不动点的存在性代替了第一节定理 CLS 的假设存在.

注 2.4　鉴于第一节定理 X 的空间框架是一致光滑的 Banach 空间,其所讨论的非线性算子是非扩张和压缩的,由此可见第一节定理 X 是本文主要结果的一种特殊情况.

参考文献:

[1] 姚庆六. 一类三阶常微分方程边值问题的可解性[J]. 郑州大学学报:理学版,2005,37(2):1-4.

[2] BROWDER F E Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert spaces [J]. Proc Natl Acad Sci, 1965, 53:1272-1276.

[3] DEIMLING K. Zeros of accretive operators [J]. Manuscripta Math, 1974, 13:365-374.

[4] ZHOU H. Convergence theorems for k - strict pseudo - contractions in 2 - uniformly smooth Banachspaces [J]. Nonlinear Anal, 2008, 69:3160-3173.

[5] BROWDER F E. Convergence theorems for sequencesof nonlinear operators in banach spaces [J]. Mathematische Zeitschrift, 1967, 100: 201-225.

[6] REICH S. Strong convergence theorems forresolvents of accretive operators in Banach spaces [J]. J Math Anal Appl, 1980, 75: 287-292.

[7] LAN K Q, WU J H. Convergence of approximantsfor demicontinuous pseudo - contractive maps in Hilbert spaces [J]. Nonlinear Anal, 2002, 49: 737-746.

[8] XU H K. Strong convergence of an iterativemethod for nonexpansive and accretive operators [J]. J Math Anal Appl, 2006, 314: 631-643.

[9] XU H K. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings [J]. J Math Anal Appl, 2004, 298: 279-291.

[10] MOUDAFI A. Viscosity approximation methods for fixed - points problems [J]. J Math Anal Appl, 2000, 241: 46-55.

[11] CHEN R, LIN P K, SONG Y. An approximation method for strictly pseudo - contractivemappings [J]. Nonlinear Anal, 2006, 64: 2527-2535.

[12] TAKAHASHI W. Nonlinear founctional analysis - fixed point theory and its application [M]. Yokohama: Yokohama Publishers Inc, 2000.

On Continuous Pseudo - contractions in the Frame Work of Reflexive Banach Spaces

SUN Li - juan

(Department of Computer Science, Kaifeng Institute of Education, Kaifeng 475000, China)

Abstract: An implicit viscosity iterative algorithm involving continuous strong psedu - contractions was considered in this paper. Strong convergence theorems of iterative sequences are established for continuous pseudo-contractions which enjoy the weakly inward condition in the framework of reflexive Banach spaces based on iterative methods. It is proved that the fixed point is also a solution to some nonlinear variational inequality. The results presented in this paper improve Moudafi's viscosity iterative algorithm which involves contraction mappings. The framework is also extended from real Hilbert spaces to real reflexive Banach spaces.

Key words: Banach limit; nonexpansive mapping; pseudo - contraction; variational inequality