文章编号:1671-6833(2010)03-0065-05

几何材料非线性的新梁柱单元及程序编制

张俊峰[1], 郝际平[2], 李 天[1]

(1. 郑州大学 土木工程学院,河南 郑州 450001;2. 西安建筑科技大学 土木工程学院,陕西 西安 710055)

摘 要:给出了基于UL法的三维梁柱单元虚功增量方程,详细推导了考虑翘曲和剪切变形影响的三维空间梁柱单元的几何非线性切线刚度矩阵,同时对Orbison截面塑性面进行了修正,以考虑扭矩和翘曲对截面强度的影响,采用塑性流动法则推导了单元弹塑性切线刚度矩阵.根据面向对象的程序设计思想,将整个有限元域划分为8个基本类,在单元基类的基础上派生了新的单元类,采用C++语言编制了面向对象的空间钢框架分析程序.算例证明,只需要一到两个单元就可以准确预测空间钢框架的极限承载力和失稳模态.

关键词:空间钢框架;翘曲;剪切变形;塑性铰;极限承载力;面向对象程序设计

中图分类号:TU313.3 **文献标识码**:A

0 引言

结构的几何材料非线性分析一直是结构分析研究中的热点,在三维钢结构的非线性分析中,通常采用两种方法建立梁柱单元的刚度方程:梁柱法和有限单元法.基于梁柱理论的梁柱法,可以很好地模拟平面结构的受力性能,但对于空间结构,采用由平面直接扩展到三维的梁柱单元,不能有效地预测弯扭屈曲.采用有限单元法,基于虚功原理的平衡方程可以考虑轴向变形与弯曲、轴向变形与剪切、轴向变形与扭转、双向弯曲、弯曲与扭转等耦合作用,能够很好的模拟空间结构的受力性能[1].在位移插值函数的选取上,有三次插值多项式[2-3]、五次多项式[4]以及基于稳定函数的插值多项式[5-8]等.基于稳定函数的插值多项式建立在梁柱方程基础上,可以很好的反映结构的受力变形,但由于拉压不同状态下位移插值函数不同,使用起来很不方便,LIEW等[5]对稳定插值函数和三次插值多项式的对比认为:当轴向力不大时,两种方法的最大误差不超过5%,这一误差是工程中所允许的.TEH[2]也对三次插值函数做了分析,认为三次插值单元有足够的精度来考虑轴力,弯曲和扭转的耦合效应,是三维空间钢结构分析的一种很有效率而简单易用的单元.作者对横向位移和转角采用三次插值函数,考虑了剪切变形和翘曲的影响,推导了空间薄壁梁柱单元的几何非线性刚度矩阵,在此基础上采用修正的Orbison屈服面方程[9]得到了单元的弹塑性刚度矩阵.

1 空间非线性梁柱单元刚度矩阵

采用的基本假定为构件是等截面的,并且双轴对称;材料是理想弹塑性;构件的塑性出现在杆端;大位移小应变;不考虑局部屈曲的影响.

1.1 虚功增量方程

如图1所示,在几何非线性增量分析中,采用三种基本的构形来描述运动的物体:以C_0表示初始未变形的构形;C_1表示已知的变形后的某一参考构形;C_2表示变形后的构形,则Lagrangian构形的增量虚功方程式为:

$$\int_V (Ee_{xx}\delta e_{xx} + 4Ge_{xy}\delta e_{xy} + 4Ge_{xz}\delta e_{xz})\mathrm{d}V + \int_V ({}^1\tau_{xx}\delta\eta_{xx} + 2{}^1\tau_{xy}\delta\eta_{xy} + 2{}^1\tau_{xz}\delta\eta_{xz})\mathrm{d}V = {}^2R - {}^1R \qquad (1)$$

双轴对称截面,剪心和形心重合.假定截面形心为C,见图2.以(u,v,w)表示截面形心的位移,基于Vlasov的扭转理论,$P(u_x,u_y,u_z)$表示截面任

收稿日期:2009-12-21;修订日期:2010-01-09

基金项目:国家自然科学基金资助项目(50378078)

作者简介:张俊峰(1981-),男,河南洛阳人,郑州大学讲师,博士,主要从事空间钢结构非线性研究,E-mail:ytoy21cn@126.com.

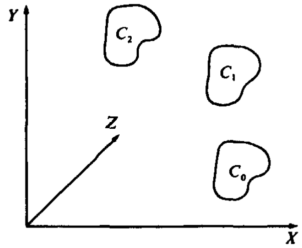

图1 单元的空间构形

Fig.1 Motion of body in 3 - D space

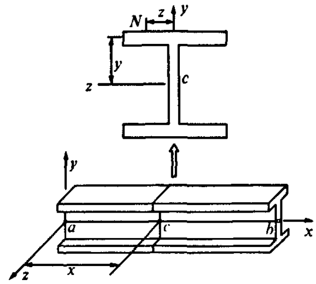

图2 几何关系

Fig.2 Geometric relationship

意点的位移,$\theta_x,\theta_y,\theta_z$ 表示截面的转动增量. ω 为相对于形心的扇形坐标,截面几何关系为:

$$\begin{cases} u_x = y - y\theta_z + z\theta_y - \omega\theta_x' \\ u_y = v - z\theta_x \\ u_z = w + y\theta_x \end{cases} \tag{2}$$

Green 应变增量为

$${}_1\varepsilon_{ij} = {}_1e_{ij} + {}_1\eta_{ij} \tag{3}$$

式中:${}_1e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial^1 x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial^1 x_i}\right)$, ${}_1\eta_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial u_k}{\partial^1 x_i}\frac{\partial u_k}{\partial^1 x_j}$.

将式(2)代入式(3),化简后代入式(1)得空间梁柱单元的虚功方程:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^l [EA\delta(u'^2) + EI_z\delta(\theta_z'^2) + EI_y\delta(\theta_y'^2) + \\ &EI_\omega\delta(\theta_x''^2) + GJ\delta(\theta_x'^2)]\mathrm{d}x + \\ &\frac{1}{2}\int_0^l GA[\delta(v' - \theta_z)^2 + \delta(w' + \theta_y)^2]\mathrm{d}x + \\ &\frac{1}{2}\int_0^l F_x\delta(u'^2 + v'^2 + w'^2)\mathrm{d}x + \\ &\frac{1}{2}\int_0^l \frac{F_xI_z}{A}\delta(\theta_z'^2)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{F_xI_y}{A}\delta(\theta_y'^2)\mathrm{d}x + \\ &\frac{1}{2}\int_0^l \frac{F_xI_\omega}{A}\delta(\theta_x''^2)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l \overline{K}\delta(\theta_x'^2)\mathrm{d}x + \\ &\int_0^l M_y\delta(u'\theta_y' - v'\theta_x')\mathrm{d}x + \int_0^l B\delta(u'\theta_x'')\mathrm{d}x + \\ &\int_0^l M_z\delta(u'\theta_z' - w'\theta_x')\mathrm{d}x - \int_0^l F_y\delta(u'\theta_z - w'\theta_x)\mathrm{d}x + \\ &(1-\alpha)\int_0^l M_x\delta(\theta_z\theta_y')\mathrm{d}x + \int_0^l F_z\delta(u'\theta_y - v'\theta_x)\mathrm{d}x - \\ &\alpha\int_0^l M_x\delta(\theta_z'\theta_y)\mathrm{d}x \\ &= {}^2R - {}^1R = \{\delta u\}^{\mathrm{T}}(\{{}^2f\} - \{{}^1f\}) \end{aligned} \tag{4}$$

式中:$(\ )' = \mathrm{d}(\ )/\mathrm{d}x$;$E$,$G$ 分别为弹性模量和剪切模量;l 为单元长度;A、I_y、I_z、分别为截面面积、截面对 y、z 轴的惯性矩;F_x、F_y、F_z 分别为单元轴力及 y、z 轴方向剪力;M_y、M_z、M_x 为单元对 y、z 轴弯矩和 x 轴扭矩;B 为双力矩;$\overline{K} = \int_A (y^2 + z^2)\mathrm{d}A \approx F_x(I_y + I_z)/A$ 为 Wagner 效应系数,$\alpha = \frac{1}{M_x}\int_A \tau_{xz}y\mathrm{d}A = 1 - \frac{1}{M_x}\int_A(-\tau_{xy}z)\mathrm{d}A$ 表示由两个方向应力产生的扭矩所占的比例;$J = \int_A\left[\left(y - \frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2 + \left(z + \frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}A$ 为截面扭转常数,其中增加了 ω 项的影响. $\{\delta u\}$ 和 $\{f\}$ 分别为节点位移向量的变分和节点力向量. 左上角标 1 和 2 代表增量荷载步的开始和结束状态.

1.2 空间梁柱单元的刚度矩阵

所建立的梁柱单元每个节点有 7 个自由度,各节点力和位移分量如图 3 所示.

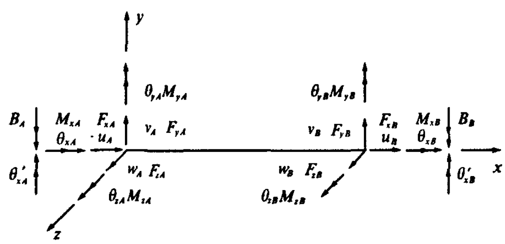

图3 梁柱单元力与位移分量

Fig.3 Force and displacement components of a beam-column element

节点力和节点位移分量为:

$$\{f\} = [F_{xA}\ \ F_{yA}\ \ F_{zA}\ \ M_{xA}\ \ M_{yA}\ \ M_{zA}\ \ B_A\ \ F_{xA}\ \ F_{yA}\ \ F_{zA}\ \ M_{xB}\ \ M_{yB}\ \ M_{zB}\ \ B_B]^{\mathrm{T}},$$

$$\{u\} = [u_A\ \ v_A\ \ w_A\ \ \theta_{xA}\ \ \theta_{yA}\ \ \theta_{zA}\ \ \theta_{\omega A}\ \ u_B\ \ v_B\ \ w_B\ \ \theta_{xB}\ \ \theta_{yB}\ \ \theta_{zB}\ \ \theta_{\omega B}]^{\mathrm{T}}.$$

单元采用如下位移场:轴向采用线性插值函数,单元横向位移和转角都采用考虑剪切变形的三次插值函数[3,8],单元扭转角采用 Hermite 三次插值函数[10].

$$u = \boldsymbol{n}_x\{u\};v = \boldsymbol{n}_y\{u\};w = \boldsymbol{n}_z\{u\};\theta_x = \boldsymbol{n}_{\theta_x}\{u\};$$

$$\theta_y = \boldsymbol{n}_{\theta_y}\{u\};\theta_z = \boldsymbol{n}_{\theta_z}\{u\};\theta_\omega = \boldsymbol{\theta}'_x \quad (5)$$

其中，扭转角插值函数为 $\boldsymbol{n}_{\theta_x} = [0\ \ 0\ \ 0\ \ N_1\ \ 0\ \ 0\ \ N_2\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ N_3\ \ 0\ \ 0\ \ N_4]$.

式中：$N_1 = 1-3\xi^2+2\xi^3$；$N_2 = (\xi-2\xi^2+\xi^3)\cdot l$；$N_3 = 3\xi^2-2\xi^3$；$N_4 = (-\xi^2+\xi^3)\cdot l$. 其中，$\xi = x/l$.

根据单元平衡条件，将单元截面内力用杆端力来表示，可得空间薄壁梁柱单元的几何非线性刚度矩阵[11]，简写成

$$([k_e]+[k_g])\{u\} = \{^2f\}-\{^1f\} \quad (5)$$

式中：$[k_e]$ 为空间梁柱单元的线性刚度矩阵；$[k_g]$ 为空间梁柱单元的几何刚度矩阵；$\{u\}$ 为单元节点位移增量向量；$\{^2f\}$ 为增量荷载步末单元节点荷载向量；$\{^1f\}$ 为增量荷载步开始时单元节点荷载向量.

结构空间变形过程中，节点在某一方向力矩作用下产生转角增量时，会引起其它方向力矩的改变，这种改变是由于截面应力变化引起的，称为连带力矩. 组成这些力矩的应力是随变形的发展而改变方向的，由此使得在空间转动时所产生的连带力矩有所不同. 当两个方向构件相交时，必须考虑这种力矩的不同而引起的节点处平衡条件的变化. 笔者借鉴 YANG 等[12]的方法，采用折减刚度矩阵来考虑力矩空间有限转动引起的不平衡力. 由于缺少弯矩和位移导数之间的偶合，当单元之间相连时，只有对称矩阵起作用，因此，把对称部分的刚度矩阵组装到结构的整体刚度矩阵中[11].

$$[k_i]_{14\times14} = \begin{bmatrix} [k_i]_A & 0 \\ 0 & [k_i]_B \end{bmatrix} \quad (6)$$

1.3　弹塑性切线刚度矩阵

材料非线性通过在单元端部形成塑性铰来考虑，当单元截面内力组合达到截面塑性强度时，即认为在该截面处形成塑性铰. 对于常用工字型截面，借鉴文献[3]和[7]，作者对 Orbison 截面塑性面[9]进行了修正，以考虑扭矩和翘曲对截面强度的影响. 修正的 Orbison 截面塑性面的表达式为：

$$\Phi = 1.15p^2+m_z^2+m_y^4+3.67p^2m_z^2+3.0p^6m_y^2 +4.65m_y^2m_z^4+m_x^2+b^2 = 1.0 \quad (7)$$

式中：$p = P/P_y$，$m_z = M_z/M_{zp}$（强轴），$m_y = M_y/M_{yp}$（弱轴），$m_x = M_x/T_p$，$b = B/B_p$，P_y = 屈服荷载，M_{yp}、M_{zp} 分别是绕 y 轴和 z 轴的塑性弯矩，T_p 为绕纵轴 x 轴的塑性扭矩. B_p 为塑性双力矩. $0\leqslant\Phi\leqslant1$，当 $\Phi=0$ 时，表示零应力状态；当 $\Phi=1$ 时，表示截面处于完全塑性状态.

假定塑性铰集中在单元端部零长度的塑性铰处，其余部分仍为弹性的，材料为理想弹塑性，并且拉压屈服点相同. 设单元力和位移分量分别为 f，u，采用上述的屈服面方程，由 Drucker 正交法则可以得到单元弹塑性增量刚度方程为

$$([k_{ep}]+[k_g]+[k_i])\{u\} = \{^2f\}-\{^1f\} \quad (8)$$

其中单元的弹塑性刚度矩阵 $[k_{ep}] = [k_e](\boldsymbol{I}-[G]([G^{\mathrm{T}}][k_e][G])^{-1}[G]^{\mathrm{T}}[k_e])$，$[G]$ 为屈服面梯度矩阵，当单元处于弹性状态时，矩阵 $[G]$ 为零矩阵，弹塑性矩阵退化为弹性刚度矩阵，随着荷载的增加，单元进入塑性变形阶段，由于塑性变形始终为正值，当某一荷载步的计算塑性变形为负时，表明出现弹性卸载，采用弹性刚度矩阵进行计算.

2　面向对象结构程序设计

笔者在文献[13]对类的基本分法的基础上作了改进，增加了节点管理类（CNodeMng）、截面特性类（CBaseElePro），扩充了总体结构类（CGlobalElement）（见图4）、单元基类（CBaseElement）、材料基类（CBaseMaterial），修改了节点类（CNode）、荷载类（CLoad）、稀疏矩阵类（CSparseMatrix），同时将平面结构拓展到空间结构，增加了基于节点类、材料基类、截面特性类的派生类，结合笔者推导的理论，在单元基类的基础上派生了能够考虑剪切变形，翘曲及几何、材料非线性的 CBeam7DOF 类. 非线性问题的跟踪分析中会遇到很多的极值点和反弯点，在极值点附近刚度矩阵会产生奇异，使得常规的求解方法失效；在反弯点附近，位移增量的无界性也使得荷载增量难以控制. 笔者采用广义位移法[12]作为几何非线性分析的数值计算方法，它可以有效的跟踪荷载位移曲线的极值点和各种拐点及反弯点，并且具有较高的稳定性. 收敛准则采用位移收敛准则，编制了面向对象的空间钢框架分析程序[11].

3　算例

3.1　直角框架

图5为一直角框架承受面内横向荷载 P，面外的扰动荷载 $0.001P$ 作为初始几何缺陷，每个构件采用的截面均为 W21×93，腹板方向在平面内，$E = 1.984\times10^{11}$ N/m^2（29 000 ksi），$\upsilon = 0.3$，$A = 0.0176$ m^2（27.3 in.^{2}），$I_z = 8.62\times10^{-4}$ m^4（2 070 in.^{4}），$I_y = 3.87\times10^{-5}$ m^4（92.9 in.^{4}），$J = 2.51\times10^{-6}$ m^4（6.03 in.^{4}），$C_\omega = 2.67\times10^{-6}$ m^6

(9 940 in.^{6}). YANG 和 MCGUIRE[14]对该结构进行了分析,采用每根构件4个单元模拟,本研究采用2个单元,计算结果对比如图6所示.

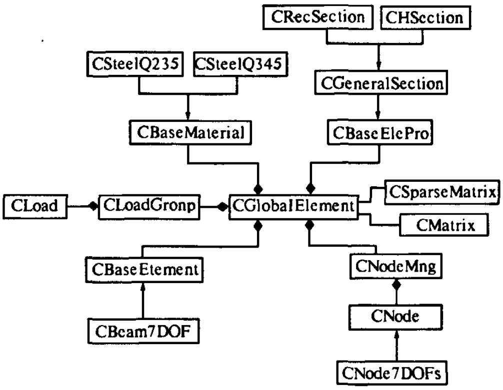

图4 总体结构类

Fig.4 Globe structure classes

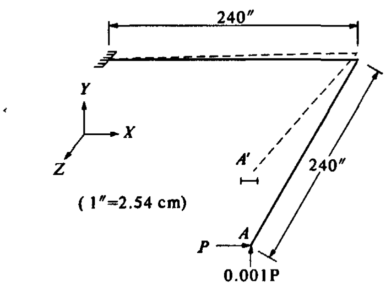

图5 直角框架

Fig.5 Right-angled frame

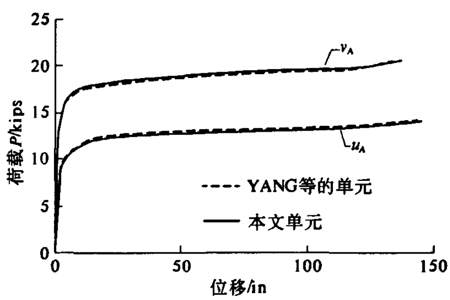

图6 直角框架荷载-位移曲线

Fig.6 Load-displacement curves of right-angled frame

从A点2个方向的荷载位移曲线可以看出,计算结果与 YANG 和 MCGUIRE[14]的分析结果符合较好,说明该单元可以很好地考虑翘曲的影响.

3.2 六层空间框架

选用文献[5]中采用的6层空间框架作为对比算例,图7为该框架的平面和透视图,所有构件的屈服应力均为250 MPa,弹性模量为206 850 MPa.大小为9.6 kN/m^{2}的楼面均布重力荷载均被等效为集中荷载作用于每层柱顶.沿Y方向的风荷载用大小为53.376 kN的集中荷载模拟,作用于前立面的每一个梁柱连接节点上.

分别对梁、柱构件采用一个单元进行模拟,荷载位移曲线如图8所示,从A点的荷载位移曲线可以看出,计算结果与 LIEW 等[5]的分析结果比较相符,荷载位移曲线略有偏低,主要由于 LIEW 等[5]没有考虑剪切变形和翘曲的影响,而此变形在多高层结构中是不应忽略的.

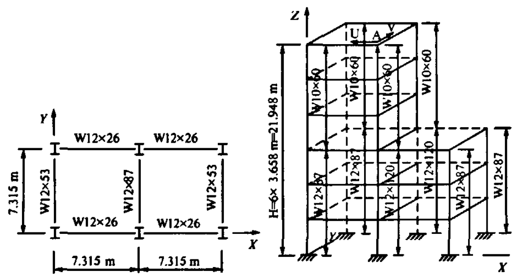

图7 六层空间框架

Fig.7 A six-story space frame

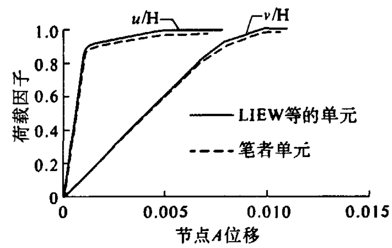

图8 六层框架荷载位移曲线

Fig.8 Load-displacement curves of six-story space frame

4 结论

笔者通过有限变形理论的基本原理,运用更新的拉格朗日列式法,建立了严格的三维梁柱单元的虚功方程,提出了考虑剪切变形和翘曲以及弯扭耦合影响的空间薄壁梁柱单元几何非线性增量刚度方程.如果忽略剪切变形的影响则与刘永华[15]推导出来的增量刚度方程一致,如果不考虑翘曲的影响则与郑廷银[8]推导出来的增量刚度方程一致,如果剪切变形和翘曲同时不予考虑则和 LIEW[5]的结果相符.为了考虑扭矩和翘曲对截面强度的影响,对 Orbison 截面塑性面进行了修正.通过算例对比,证实该方法是可靠的,采用一到两个单元就可以获得较高的精度,能够准确预测空间钢框架的失稳模式和极限承载力.

采用面向对象的程序设计方便了程序的维护

和开发,算例表明该程序的编制是可靠的,算法是正确的.

参考文献:

[1] ZHANG J F, Hao J P, Wang L K, et al. Nonlinear analysis technique of improved plastic hinge methods for steel frames[C]// Shen Z Y. International Symposium on Innovation & Sustainability of Structures in Civil Engineering. Nanjing: Southeast University Press. 2007:274 - 282.

[2] TEH L H. Cubic beam elements in practical analysis and design of steel frames [J]. Engineering Structures. 2001, 23:1243 - 1245.

[3] 舒兴平. 高等钢结构分析与设计[M]. 北京:科学技术出版社, 2006.

[4] CHAN S L, ZHOU Z H. Pointwise equilibrating polynomial element for nonlinear analysis of frames [J]. Journal of Structural Engineering. 1994, 120(6): 1703 - 1717.

[5] LIEW J Y R, CHEN H, SHANMUGAM N E, et al. Improved nonlinear plastic hinge analysis of space frame structures [J]. Engineering Structures, 2000, 22(10):1324 - 1338.

[6] 王孟鸿. 三维空间钢结构高级分析理论与应用[D]. 西安:西安建筑科技大学土木工程学院, 2003.

[7] 刘坚. 基于结构极限承载力的轻型钢框架结构的计算理论及其应用的研究[D]. 重庆:重庆大学土木工程学院, 2003.

[8] 郑廷银. 高层建筑钢结构巨型框架体系的高等分析理论及其实用计算[D]. 南京:东南大学土木工程学院, 2002.

[9] ORBISON J G. Nonlinear static analysis of three - dimensional steel frame [R]. Report No. 82 - 6, Department of Structural Engineering, Cornell University, Ithaca, New York, 1982.

[10] 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法[M]. 北京:清华大学出版社, 1996.

[11] 张俊峰. 钢框架高等分析研究及面向对象的程序设计[D]. 西安:西安建筑科技大学土木工程学院, 2008.

[12] YANG Y B, KUO S R. Theory and analysis of nonlinear framed structures[M]. Singapore: Prentice Hall Simon & Schuster (Asia) Pte Ltd, 1994.

[13] 吴晓涵. 面向对象结构分析程序设计[M]. 北京:科学出版社, 2002.

[14] YANG Y B, MCGUIRE W. Joint rotation and geometric nonlinear analysis[J]. Journal of Structural Engineering. 1986, 112(4):879 - 905.

[15] 刘永华. 空间钢框架高等分析方法研究[D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学土木工程学院, 2007 年.

A New Geometric Material Nonlinear Beam-column Element and Program Design

ZHANG Jun - feng[1], HAO Ji - ping[2], LI Tian[1]

(1. School of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China; 2. School of Civil Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: An incremental virtual work equation for the three-dimensional beam-column element was proposed based on the UL method. The geometric nonlinear tangent stiffness matrix for three-dimensional beam-column element considering warping and shear deformation effects was derived. The Orbison sectional strength was modified in order to consider the effects of torsion moment and warping. The elastic-plastic tangent stiffness matrix was acquired based on the flow theory. Based on the object-oriented design conception, the finite element analysis domain is divided into eight classes. A new class is derived from the Base Element class. Using C + + language, the spatial steel frame advanced analysis program is complied. Numerical examples show that the model can be used to predict accurately the utmost bearing capacity and instability mode of three-dimensional space frames by modeling each member using one or two elements.

Key words: spaced-framed structure; warping; shear deformation; plastic-hinge; utmost bearing capacity; object-oriented program design