

文章编号:1671-6833(2010)02-0052-04

饱和层状地基的瞬态动力响应分析

时刚^{1,2}, 高广运², 郭院成¹

(1. 郑州大学 土木工程学院, 河南 郑州 450001; 2. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘要: 在 Biot 饱和多孔介质理论的基础上, 应用 Laplace 变换、Fourier 级数展开和 Hankel 变换将波动方程转化为一组二阶常微分方程; 运用薄层法原理在竖向进行离散求解, 得到饱和层状地基 Lamb 问题的 Laplace 域内解答, 并利用 Laplace 数值逆变换最终得到时域内的数值解答, 最后, 通过计算实例验证了本文方法。

关键词: 饱和层状地基; 瞬态响应; 薄层法

中图分类号: TU435 **文献标识码:** A

0 引言

饱和土在我国东南沿海经济发达地区分布广泛, 内陆城市主要沿江河分布。由于饱和土是一种流固耦合的两相介质, 与单相介质相比, 其波动问题更为复杂。Biot^[1] 首先建立了饱和多孔介质的波动方程, 此后, 众多学者对饱和土的 Lamb 问题展开了广泛的研究。Philippacopoulos^[2] 运用势函数法研究了垂直集中荷载的饱和土 Lamb 问题; 王立忠等^[3] 采用积分变换法研究了饱和半空间表面作用垂直集中力时的稳态解; 文献[4-7] 研究了饱和土在稳态荷载下的 Lamb 问题; 此外, 蔡袁强等^[8]、张玉红等^[9] 采用传递矩阵法分别研究了轴对称和非轴对称荷载下饱和层状地基的动力响应。上述成果仅研究了饱和地基的稳态动力响应, 对于饱和土的瞬态 Lamb 问题, 周香莲等^[10] 则采用 Laplace-Hankel 变换技术分别研究了垂直和水平集中荷载下饱和地基的瞬态动力响应, 而对饱和层状地基的瞬态响应问题尚未涉及。

笔者在前期研究的基础^[11] 上针对饱和层状地基的瞬态 Lamb 问题, 采用薄层法进行求解, 对 Biot 波动方程进行 Laplace 变换、Fourier 级数分解和相应的变量代换, 并进行 Hankel 变换, 得到一组常微分方程; 然后采用类似于有限元的方法在竖向进行离散求解, 得到薄层法的基本方程, 并对方程进行求解, 获得饱和层状地基 Laplace 域内

基本解答, 并运用数值 Laplace 反变换得到时域解答。通过计算实例, 验证了本文算法, 并给出了不同覆盖层厚度的两层地基在水平荷载作用下地面一点的瞬态动力响应。

1 饱和土基本动力方程

对饱和土 Biot 波动方程^[1] 进行时间 t 的 Laplace 变换, 消去流体相对于土骨架的位移, 可以得到在柱坐标系下以孔压和土骨架位移为基本量的方程为

$$\begin{cases} \mu \left(\nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} - (\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial r} + F_r = -H u_r \\ \mu \left(\nabla^2 u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + (\lambda + \mu) \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \theta} - (\alpha + \beta) \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + F_\theta = -H u_\theta \\ \mu \nabla^2 u_z + (\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} - (\alpha + \beta) \frac{\partial p}{\partial z} + F_z = -H u_z \\ \frac{\beta}{\rho_i s^2} \nabla^2 p + \frac{1}{M} + (\alpha + \beta) \varepsilon = 0 \end{cases} \quad (1)$$

式中: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; s 为 Laplace 变换参数; $H = -s^2(\rho + \beta\rho_i)$; u_i 为土骨架位移分量; F_i 为作用在土骨架上的体积力; $\beta = -\rho_i s^2 /$

收稿日期: 2009-10-10; 修订日期: 2009-12-24

基金项目: 国家自然科学基金资助(50878155)

作者简介: 时刚(1978-), 男, 山东日照人, 郑州大学讲师, 博士, 主要从事土动力学和环境土工学方面的研究, E-mail: shigang@zzu.edu.cn

($sb + \rho_r s^2/n$), 其中, $b = \eta/k_d$ 为黏性耦合系数, η 为孔隙流体动力黏滞系数, k_d 为动力渗透系数; n 为土体孔隙率; ρ_s, ρ_f 分别为土骨架和孔隙流体的密度; μ, λ 为拉梅常数; α, M 为 Biot 参数; $\rho = \rho_f n + \rho_s(1-n)$.

2 饱和层状地基的薄层法解答

对于层状地基而言, 采用薄层法进行求解, 可在一定程度上降低计算难度. 薄层法属于一种半解析方法, 即对波动方程在竖向进行类似于有限元法的离散, 将土层划分为有限个薄层, 如图 1 所示, 而在其余坐标方向(水平方向)进行解析求解.

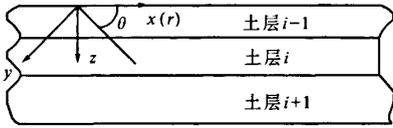


图 1 地基分层示意图

Fig.1 Sketch of layered ground

2.1 薄层法基本方程

对式(1)沿切向坐标 θ 进行 m 阶 Fourier 级数展开, 只考虑其中任意第 m 项, 并对(1)式的第一行和第二行相加或相减后, 并对第一、二、三、四行沿轴向坐标 r 分别进行 $m-1, m+1, m, m$ 阶 Hankel 变换, 并进行相应的变量代换后可得:

$$\begin{cases} \mu(-k^2 \bar{U}_m + \partial^2 \bar{U}_m / \partial z^2) - \eta k \bar{p}_m + H \bar{U}_m + \bar{F}_m + \ell(k^2(\bar{V}_m - \bar{U}_m)/2 + k \partial \bar{u}_{zm} / \partial z) = 0 \\ \mu(-k^2 \bar{V}_m + \partial^2 \bar{V}_m / \partial z^2) + \eta k \bar{p}_m + H \bar{V}_m + \bar{F}_m + \ell(k^2(k^2(\bar{U}_m - \bar{V}_m)/2 - k \partial \bar{u}_{zm} / \partial z)) = 0 \\ \mu(-k^2 \bar{u}_{zm} + \partial^2 \bar{u}_{zm} / \partial z^2) - \eta \partial \bar{p}_m / \partial z + H \bar{u}_{zm} + \bar{F}_{zm} + \ell(k(\bar{V}_m - \bar{U}_m)/2 + \partial^2 \bar{u}_{zm} / \partial z^2) = 0 \\ \beta(-k^2 \bar{p}_m + \partial^2 \bar{p}_m / \partial z^2) / \rho_f s^2 + \bar{p}_m / M + \eta(k(\bar{V}_m - \bar{U}_m)/2 + \partial \bar{u}_{zm} / \partial z) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中: “ $\bar{\quad}$ ”表示 Hankel 变换后的量; k 为 Hankel 变换参数; $\eta = \alpha - \beta$; $l = \lambda + \mu$;

$$\bar{U}_m = \int_0^\infty U_m^1 r J_{m-1}(kr) dr; \quad \bar{V}_m = \int_0^\infty U_m^2 r J_{m+1}(kr) dr;$$

$$\bar{u}_{zm} = \int_0^\infty u_{zm} r J_m(kr) dr; \quad \bar{p}_m = \int_0^\infty p_m r J_m(kr) dr.$$

其中, $U_m^1 = u_{rm} + u_{\theta m}$, $U_m^2 = u_{rm} - u_{\theta m}$ (正弦分解), 或 $U_m^1 = u_{rm} - u_{\theta m}$, $U_m^2 = u_{rm} + u_{\theta m}$ (余弦分解). J_m 为第 1 类 Bessel 函数.

对式(2)的第一、二行相加, 并进行代换 $\bar{U}_{1m}^* = (\bar{U}_m + \bar{V}_m)/2$, $\bar{U}_{2m}^* = (\bar{U}_m - \bar{V}_m)/2$, 从而可得:

$$\begin{cases} \mu \left[-k^2 \bar{U}_{1m}^* + \frac{\partial^2 \bar{U}_{1m}^*}{\partial z^2} \right] + H \bar{U}_{1m}^* + \bar{F}_m^I = 0 \\ \mu \left[-k^2 \bar{U}_{2m}^* + \frac{\partial^2 \bar{U}_{2m}^*}{\partial z^2} \right] + \ell \left[-k^2 \bar{U}_{2m}^* + k \frac{\partial \bar{u}_{zm}}{\partial z} \right] - \eta k p + H \bar{U}_{2m}^* + \bar{F}_m^{II} = 0 \\ \mu \left(-k^2 \bar{u}_{zm} + \frac{\partial^2 \bar{u}_{zm}}{\partial z^2} \right) + \ell \left(-k \frac{\partial \bar{U}_{2m}^*}{\partial z} + \frac{\partial^2 \bar{u}_{zm}}{\partial z^2} \right) - \eta \partial \bar{p}_m / \partial z + H \bar{u}_{zm} + \bar{F}_{zm} = 0 \\ \frac{\beta}{\rho_f s^2} \left(-k^2 \bar{p}_m + \frac{\partial^2 \bar{p}_m}{\partial z^2} \right) + \frac{\bar{p}_m}{M} + \eta \left(-k \bar{U}_{2m}^* + \frac{\partial \bar{u}_{zm}}{\partial z} \right) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

同样, 对应力以及流量进行上述变换和变量代换后, 有:

$$\begin{cases} \bar{\tau}_m^1 = \mu \frac{\partial \bar{U}_{1m}^*}{\partial z} \\ \bar{\tau}_m^2 = \mu \left(\partial \bar{U}_{2m}^* / \partial z + k \bar{u}_{zm} \right) \\ \bar{\sigma}_m = -\lambda k \bar{U}_{2m}^* + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \bar{u}_{zm}}{\partial z} - \alpha \bar{p}_m \\ \frac{\bar{q}_{zm}}{s} = \frac{\beta}{\rho_f s^2} \left[\frac{\partial \bar{p}_m}{\partial z} + \rho_f s^2 \bar{u}_{zm} \right] \end{cases} \quad (4)$$

对饱和层状地基在竖向进行类似于有限元法的离散, 将地基离散为 n_s 个水平薄层, 层内位移和孔压可采用线性插值. 则第 i 层内土体位移 $\bar{U}_{1m}^*, \bar{U}_{2m}^*, \bar{u}_{zm}$ 和孔压 \bar{p}_m 可表示为:

$$\begin{cases} \bar{U}_{1m}^* = N \bar{U}_{1mi}, \quad \bar{u}_{zm} = N \bar{u}_{zmi} \\ \bar{U}_{2m}^* = N \bar{U}_{2mi}, \quad \bar{p}_m = N \bar{p}_{mi} \end{cases} \quad (5)$$

式中: $\bar{U}_{1mi}, \bar{U}_{2mi}, \bar{u}_{zmi}, \bar{p}_{mi}$ 分别为第 i 薄层土相应结点位移、孔压矢量; $N = [1 - \xi, \xi]$ 为层插值函数, 其中, ξ 为广义坐标, 对于第 i 层土, 当 $z_i \leq z \leq z_{i+1}$ 时 $\xi = (z - z_i) / (z_{i+1} - z_i)$.

将式(5)代入式(3)的 4 个方程后可得残差, 令在层内及层面上加权残差为零, 并注意式(4)中应力和流量的表示形式, 最终可以得到薄层法的基本方程:

$$(k^2 \mathbf{A} - k \mathbf{B} + \mathbf{C}) \bar{\mathbf{U}}_m = \bar{\mathbf{P}}_m \quad (6)$$

式中: $\bar{\mathbf{U}}_m, \bar{\mathbf{P}}_m$ 分别为总体位移向量和荷载向量; k 为波数; $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 为饱和地基的总体刚度矩阵, 由层刚度矩阵 $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{C}_i$ 集总得到, 具体集总过程参见文献[11].

2.2 薄层法基本方程的解答

式(6)是一个非齐次方程组, 可采用特征值法进行求解. 对式(6)求特征值和特征矩阵, 并考虑到特征向量矩阵的正交性, 最终可获得薄层法基本方程的解答为:

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_{1m} \\ \bar{U}_{2m} \\ \bar{U}_{3m} \\ \bar{p}_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 D_L \Phi_1^T & & & \\ & \Phi_2 D_R \Phi_2^T & k \Phi_2 \zeta^{-1} D_R \Phi_2^T & k \Phi_2 \zeta^{-1} D_R \Phi_2^T \\ & \Phi_3 \zeta D_R \Phi_2^T / k & \Phi_{3m} D_R \Phi_m^T & \Phi_3 D_R \Phi_2^T \\ & \Phi_4 \zeta D_R \Phi_2^T / k & \Phi_4 D_R \Phi_m^T & \Phi_4 D_R \Phi_2^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{P}_m \\ \bar{P}_m \\ \bar{P}_m \\ \bar{W}_{jm} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

式中: $D_L = (k^2 I - \zeta_l^2)^{-1}$; $D_R = (k^2 I - \zeta_R^2; \zeta_L, \zeta)$ 为对应的齐次方程的特征值矩阵; $\Phi_1^T, [\Phi_1^T, \Phi_2^T, \Phi_3^T]^T$ 为对应的特征向量矩阵. 详细求解过程可参见文献[11].

2.3 饱和地基的位移、孔压 Laplace 域基本解

首先,考虑作用于薄层第 j 个节点上的 x 方向的集中荷载 $F_x(t)$,假定该荷载为半径等于 R 的盘状荷载,对荷载进行 Laplace 变换,并进行 Fourier 级数分解和相应的变量代换,并令 $R \rightarrow 0$,集中荷载最终可变换为:

$$\bar{P}_{1j} = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T F_x(s) \delta(z - z_j) / 2\pi \quad (8)$$

将式(8)带入式(7)中,再进行相应的变量代换以及 Hankel 逆变换后,最终获得 Laplace 域内的位移和孔压的基本解答为:

$$\begin{cases} \hat{u}_r(s) = \frac{F_x(s)}{2\pi} [\Phi_1 H_{L2} \Phi_{1j}^T + \Phi_2 H_{R1} \Phi_{2j}^T] \cos\theta \\ \hat{u}_\theta(s) = -\frac{F_x(s)}{2\pi} [\Phi_1 H_{L1} \Phi_{1j}^T + \Phi_2 H_{R2} \Phi_{2j}^T] \sin(\theta) \\ \hat{u}_z(s) = F_x(s) \Phi_3 H_{R3} \Phi_{3j}^T \cos(\theta) / 2\pi \\ \hat{p}(s) = F_x(s) \Phi_4 H_{R3} \Phi_{4j}^T \cos(\theta) / 2\pi \end{cases} \quad (9)$$

式中: $H_{R1} = \text{diag} \left\{ \frac{1}{k_R^2 r^2} - \frac{i\pi}{2} \frac{\partial H_1^{(2)}(k_R r)}{\partial r} \right\}$; $H_{R2} = -\text{diag} \left\{ \frac{1}{k_R^2 r^2} + \frac{i\pi}{2k_R r} H_1^{(2)}(k_R r) \right\}$; $H_{R3} = r k_\alpha H_{R2}$; H_{L1}, H_{L2} 与 H_{R1}, H_{R2} 类似; k_R 和 k_L 为特征向量. 与传递矩阵方法不同,柱坐标系下的位移和孔压解答不需要进行数值 Hankel 逆变换,在一定程度上提高了计算的效率.

对于其他荷载形式,采用同样的方法进行求解,这里不再给出具体过程.

2.4 饱和地基的位移、孔压时域解答

当给定集中荷载时,由式(7)可以给出 Laplace 域内饱和和层状地基的位移、孔压基本解答. 为获得时域的解答,需要进行数值 Laplace 逆变换,笔者采用 Dubin 方法进行 Laplace 数值逆变换,从而保证了计算结果的精度.

3 计算实例

实例 1: 为验证本文方法,将饱和介质中的解退化到单相介质中,取 $\rho_f = 0, n = 0$. 其它参数取值分别为: $\mu = 54.3 \text{ Mpa}$,泊松比 $\nu = 0.25, b = 1e + 11, \rho_s = 1800 \text{ kg/cm}^3$. 荷载为一作用于弹性半空间表面的水平向集中荷载 $F = F_0 H(t)$. 计算结果如图 2 所示.

从图 2 可以看出,本文的退化解答基本上能够真实再现弹性介质中的波动,本文结果与文献[12]的解答较为吻合,从而验证了本文结果.

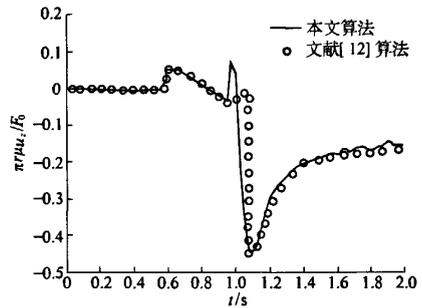


图 2 水平荷载下弹性半空间表面竖向位移

Fig. 2 Vertical displacement of elastic half-space surface under horizontal load

实例 2: 采用本文算法对饱和两层地基的动力响应问题进行分析,分上软下硬地基和上硬下软地基两种情况进行计算. 饱和和土体相关计算参数如表 1 所示. 计算时分别计算不同覆盖层厚度时距振源 8 m 处点位移时程,如图 3 所示.

表 1 饱和土相关计算参数

Tab. 1 Material parameters of saturated soil				
土层	μ/MPa	ν	$\rho_s/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	M/GPa
较软土层	26.5	0.25	2 600	2.1
较硬土层	53.0			
土层	n	α	$\rho_f/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	b
较软土层	0.4	0.97	1 000	1×10^9
较硬土层				

由图 3 可以看出,覆盖层厚度不同时,距振源 8 m 远的饱和地基表面点的竖向位移时程曲线是不同的;覆盖层厚度越小,表面位移受下层土的影响也越大,受影响的时刻也越靠前. 这主要是由于交界面波阻抗的变化导致波从交界面反射回半空间表面,从而对半空间表面点的振动产生影响. 此外,上软下硬地基和上硬下软地基地面点的位移时程受下层土的影响大致相反,这与波在土层交界面上的反射规律是相对应的.

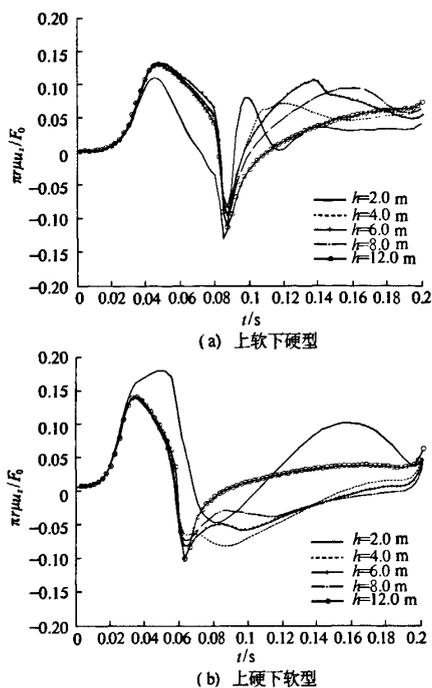


图3 不同厚度覆盖层时饱和双层地基的无量纲位移 u_z
 Fig.3 Non-dimensional displacement u_z of two-layered half-space for different thickness of coating

4 结论

针对饱和层状地基的瞬态动力响应问题,对 Biot 波动方程进行对时间的 Laplace 变换,并进行 Fourier 级数展开和 Hankel 变换,得到一组常微分方程,运用薄层法原理在竖向进行离散求解,获得了土骨架位移、孔压的基本解答;并通过 Dubin 数值反 Laplace 变换得到问题的时域解答;最后通过实例,验证了本文方法,并对不同覆盖层厚度的上软下硬地基和上硬下软地基进行了计算分析。

Analysis of Transient Response of Saturated Layered Half-space Soil

SHI Gang^{1,2}, GAO Guang-yun², GUO Yuan-cheng¹

(1. School of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The transient response of saturated layered ground subjected to concentrated loads is investigated. By using Laplace transform, Fourier series expansion and Hankel transform, the Biot's dynamic equations in each layer are reduced into a series of ordinary differential equations, which can be solved by thin layered method (TLM). The general solutions for displacement and pore pressure in Laplace domain are derived by analytical inversion of Hankel transform, and the solutions in time domain are obtained by numerical inversion of Laplace transform. Finally, some examples are given to validate the method.

Key words: layered saturated half-space; transient response; thin layered method

参考文献:

- [1] BOIT M A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid - saturated porous solid (1) Low - frequency range[J]. J Acoust Soc Am, 1956, 28:168 - 78.
- [2] PHILIPPACOPOULOS A J. Lamb's problem for fluid - saturated porous media[J]. Bull seism Soc Am, 1988, 78(2): 908 - 923.
- [3] 王立忠, 陈云敏, 吴世明, 等. 饱和弹性半空间在低频谐和集中力下的积分形式解[J]. 水利学报, 1996 (2): 84 - 89.
- [4] LU J F, WANG J H, SHEN W P. The green's function of the harmonic horizontal force applied at the interior of the saturated half - space soil[J]. Acta Seismologica Sinica, 2001, 14(2): 196 - 202.
- [5] 陈胜立, 张建民, 陈龙珠. 饱和土埋置力源的三维动力 Lamb 问题解答[J]. 固体力学学报, 2004, 25(2): 149 - 154.
- [6] 黄义, 张玉红. 饱和土三维非轴对称 Lamb 问题[J]. 中国科学: E 辑, 2000, 30(4): 375 - 384.
- [7] 张引科, 黄义. 弹性饱和多孔介质在非轴对称荷载下的稳态动力响应[J]. 土木工程学报, 2002, 35(3): 41 - 45.
- [8] 蔡袁强, 徐长节, 郑灶峰, 等. 轴对称饱和地基竖向振动分析[J]. 应用数学与力学, 2006, 27(1): 75 - 80.
- [9] 张玉红, 黄义, 王忠建. 层状饱水软土地基三维非轴对称动力响应分析方法[J]. 地震工程与工程振动, 2002, 22(4): 47 - 52.
- [10] 周香莲, 王建华, 陆建飞. 半空间饱和土作用垂直集中荷载时的瞬态解[J]. 上海交通大学学报, 2002, 36(3): 428 - 431.
- [11] 时刚. 饱和地基中 Rayleigh 波的传播与屏障隔振研究[D]. 上海: 同济大学 土木工程学院, 2008.
- [12] CHAO C C. Dynamical response of an elastic half - space to tangential surface loading[J]. Journal of Applied Mechanics, 1960, 27: 559 - 567.