

# 曲面底扩散陡槽急流问题的特征线解法

高双聚, 王冠慧

(郑州大学 水利与环境学院, 河南 郑州 450001)

**摘 要:** 针对曲面底扩散陡槽内急流特点采用沿水深的积分方法, 并考虑曲率、底坡及底摩擦对流动的影响, 将三维水流运动方程组简化为二维水深平均流方程, 并导出了水深平均流的特征方程组; 结合抛物柱面底扩散陡槽工程实例采用特征差分法进行数值计算, 通过逐时段内插, 调整计算点分布可克服特征线方法计算点分布不规则的缺点, 使计算结果便于实用。

**关键词:** 急流; 曲面底; 扩散陡槽; 特征线

**中图分类号:** TV 135.2

**文献标识码:** A

## 0 引言

曲面底扩散陡槽是高速水流急流控制建筑物的常见形式. 本文限于槽底为柱面的情况(如图1所示), 其准线为位于  $xz$  平面内的抛物线, 母线平行于指向槽宽方向的  $y$  轴. 由于槽底为曲面时存在法向加速度使动水压强不符合静压分布规律, 适用于平面底的水深平均流方程<sup>[1]</sup>已不再反映水流实际情况, 使这种陡槽急流计算遇到困难, 不得不通过水工模型试验辅助工程设计<sup>[2]</sup>. 模型试验费用高、耗时多, 造成工程研究效率低. 为此考虑压强非静压分布对平底陡槽二维水深平均流方程修正, 研究曲面底渠槽流动的平均方程, 进一步完善急流计算理论, 具有工程实际意义.

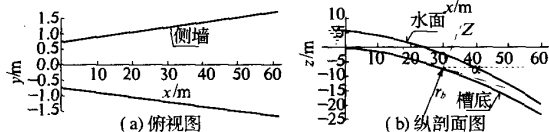


图1 曲面底扩散陡槽示意图

Fig. 1 Divergent chute on curved bed

## 1 数学模型

三维流动方程沿水深的积分采用直角坐标系,  $z$  轴取向渠底法线方向, 质量力仅有重力; 考虑  $z$  方向的流动尺度远小于其它两方向的急流, 三维运动方程组如下:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_x u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_z u_x}{\partial z} = g \sin \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_y u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z u_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u_z u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z u_z}{\partial z} = -g \cos \alpha - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4)$$

方程中切应力已包含雷诺应力. 仅保留其对  $z$  的梯度项. 方程(1)~(4)中:  $g$  为重力加速度;  $\rho$  为水的密度;  $p$  为动水压强;  $\alpha$  为槽底倾角; 随  $x$  而变;  $\tau_{xy}$  和  $\tau_{yz}$  分别为与  $z$  轴垂直的面上切应力沿  $x$ 、 $y$  方向的分量;  $u_x$ 、 $u_y$ 、 $u_z$  分别为沿  $x$ 、 $y$ 、 $z$  方向的流速分量. 水深  $h$  为沿槽底法向量取的水舌厚度. 借鉴文献[3], 利用边界条件对方程(1)~(4)沿  $z$  在  $[0, h]$  上积分, 将其化为二维形式:

$$\frac{\partial}{\partial x}(hU_x) + \frac{\partial}{\partial y}(hU_y) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1 h U_x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_2 h U_x U_y) = g h \sin \alpha -$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p_m h)}{\partial x} + \frac{\tau_x}{\rho} \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_2 h U_x U_y) + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha_3 h U_y^2) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p_m h)}{\partial y} + \frac{\tau_y}{\rho} \quad (7)$$

其中:

收稿日期: 2009-04-01; 修订日期: 2009-07-10

作者简介: 高双聚(1957-), 男, 河南偃师人, 郑州大学副教授, 硕士, 主要从事水力学及河流动力学研究, E-mail:

shgsj@zzu.edu.cn.

$$p_m = \frac{1}{h} \int_0^h p dz, \alpha_1 = \frac{1}{h U_x^2} \int_0^h u_x^2 dz,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{h U_x U_y} \int_0^h u_x u_y dz, \alpha_3 = \frac{1}{h U_y^2} \int_0^h u_y^2 dz,$$

$$U_x = \frac{1}{h} \int_0^h u_x dz, U_y = \frac{1}{h} \int_0^h u_y dz.$$

式中:系数  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  取 1.0;  $\tau_x, \tau_y$  为底部切应力沿  $x, y$  方向的分量.

因法向加速度  $a_r = -u^2/R$ , 式(4) 可写为:

$$\frac{u^2}{R} = g \cos \alpha + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (8)$$

式中:  $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$ ,  $R$  为流线的曲率半径, 以凹向  $z$  轴正方向弯曲的曲率半径为正, 近似取  $R = r_b + z$ , 令  $u^2 = \alpha_u U^2$ ,  $U^2 = U_x^2 + U_y^2$ ; 利用水面大气压条件, 近似认为  $\alpha_u$  为常数; 考虑  $h/r_b \ll 1$  的陡槽, 对式(8) 在  $[0, h]$  上积分, 得近似单宽动水总压力:

$$p_m h \approx \frac{1}{2} \rho g h^2 (\cos \alpha + \frac{\alpha_u U^2}{g r_b}) \quad (9)$$

式中:  $r_b$  为槽底曲率半径.

将式(9) 代入式(5) ~ (7), 写成矩阵形式:

$$A_x \frac{\partial V}{\partial x} + A_y \frac{\partial V}{\partial y} = f \quad (10)$$

式(10) 中各量定义如下:

$$A_x = \begin{bmatrix} 2CU_x & gh & 0 \\ 2C\alpha_g & (1 + h/r_b)U_x & U_y h/r_b \\ 0 & 0 & U_x \end{bmatrix},$$

$$A_y = \begin{bmatrix} 2CU_y & 0 & gh \\ 0 & U_y & 0 \\ 2C\alpha_g & U_x h/r_b & (1 + h/r_b)U_y \end{bmatrix},$$

$$V = [C \quad U_x \quad U_y]^T,$$

$$f = [0 \quad -\frac{\tau_x}{\rho h} + g i_x \alpha_i \quad -\frac{\tau_y}{\rho h}]^T,$$

$$i_x = \sin \alpha, \alpha_g = \frac{U^2}{g r_b} + \sqrt{1 - i_x^2},$$

$$\alpha_i = 1 + \frac{h}{2r_b} (\frac{U^2}{g r_b} \frac{r_b'}{i_x} + r_b \frac{i_x'}{\sqrt{1 - i_x^2}}), C = \sqrt{gh}.$$

底部切应力用 Chézy 定律计算:

$$\tau = \rho g h \frac{n^2 U^2}{h^{4/3}} \quad (11)$$

$$\tau_x = \tau \frac{U_x}{U}; \tau_y = \tau \frac{U_y}{U} \quad (12)$$

式中:  $r_b', i_x'$  分别为  $r_b, i_x$  对  $x$  的一阶导数;  $n$  为糙率.  $\alpha_g$  和  $\alpha_i$  分别为由于底部倾斜和弯曲引起的修

正系数.

## 2 特征方程组

沿流场中曲线  $y = y(x)$ , 定义导算子:

$$\frac{D}{Dx} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dx} \frac{\partial}{\partial y} \quad (13)$$

若  $V$  对  $x$  的偏导数沿该曲线不定<sup>[4]</sup>, 则由

$$\frac{dy}{dx} = \zeta \quad (14)$$

确定的曲线  $y(x)$  为特征线, 沿此特征线方程组式(10) 可写成:

$$M_\zeta \frac{\partial V}{\partial x} = A_y \frac{DV}{Dx} - \zeta f \quad (15)$$

式中:  $M_\zeta = A_y - \zeta A_x$ .

由  $|M_\zeta| = 0$  可求得相应的 3 个特征值  $\zeta$ :

$$\zeta_1 = \frac{U_x U_y + \alpha_h C^2 \sqrt{F_r^2 / \alpha_h - 1}}{U_x^2 - \alpha_h C^2} \quad (16)$$

$$\zeta_2 = \frac{U_x U_y - \alpha_h C^2 \sqrt{F_r^2 / \alpha_h - 1}}{U_x^2 - \alpha_h C^2} \quad (17)$$

$$\zeta_3 = U_y / U_x \quad (18)$$

式中:  $F_r$  为 Froude 数,  $F_r = U / \sqrt{gh}$ ;  $\alpha_h = \alpha_g / (1 + h/r_b) \approx \alpha_g$ .

根据线性代数理论<sup>[5]</sup>, 每一个  $\xi$  值存在一个特征向量:  $L = [l_1, l_2, l_3]$ , 乘以式(15) 使  $L \cdot M_\zeta = 0$ , 可求得

$$l_1 = \frac{\alpha_g (-\zeta U_x + U_y)}{\alpha_g C^2 \zeta - (-\zeta U_x + U_y)^2} \quad (19)$$

$$l_2 = \frac{\alpha_g C^2 \zeta}{\alpha_g C^2 \zeta - (-\zeta U_x + U_y)} \quad (20)$$

$$l_3 = 1 \quad (21)$$

可将式(15) 化成沿特征线式(14) 的常微分方程组:

$$L \cdot A_y \frac{DV}{Dx} = L \cdot \zeta f \quad (22)$$

## 3 曲面上急流中扰动波传播特性

由式(16) ~ (18) 可定义三族特征线,  $\zeta_1, \zeta_2$  确定扰动传播线,  $\zeta_3 = U_y / U_x$  确定流线. 若  $\delta$  为流速与  $x$  轴的夹角, 流速分量可表为:

$$U_x = U \cos \delta, U_y = U \sin \delta \quad (23)$$

第 1, 2 族特征线方程可变换为:

$$\frac{dy_{1,2}}{dx} = \zeta_{1,2} = \tan(\delta \pm A) \quad (24)$$

其中:  $\sin A = \sqrt{\alpha_g} / F_r$  (25)

式中:  $A$  为流速与扰动线夹角, 如图 2 所示扰动线关于流速方向对称。

对于水平和倾斜平面底,  $r_b = \infty$ ,  $A$  与文献 [1] 结果相同; 而对弯曲槽底, 上述结果式 (25) 可视为对文献 [1] 结果的修正; 底部上凸弯曲,  $r_b > 0$ , 使  $A$  增大, 这可以促使急流水舌沿槽宽方向分散, 使下游流动在槽宽方向分布较均匀, 这一结果反映了模型试验观测到的物理现象。

沿第 1、2 族特征线, 特征关系为:

$$\pm h \frac{D\delta}{Dx} + \frac{1}{2} \sin 2A \frac{Dh}{Dx} =$$

$$\mp (i_x \alpha_i - \frac{n^2 U^2}{h^{4/3}} \cos \delta) \tan(\delta \pm A) / F_r^2 \quad (26)$$

第 3 族特征线方程可变换为:

$$\frac{dy_3}{dx} = \tan \delta \quad (27)$$

沿第 3 族特征线, 特征关系为:

$$\alpha_i \frac{Dh}{Dx} + \frac{D}{Dx} \left( \frac{U^2}{2g} \right) = i_x \alpha_i - \frac{n^2 U^2}{h^{4/3}} \cos \delta \quad (28)$$

$F_r > 1$  时, 式 (5) ~ (7) 为拟线性双曲线型, 式 (24)、(26)、(27)、(28) 为其特征线形式, 由于包含了阻力、曲底对冲击波传播的影响, 不能像文献 [6] 那样进行解的整体分析, 只能借助计算机求得数值解。

#### 4 算例

如图 2 所示, 沿槽宽方向相距不远的任意两点 1、2, 从点 1 出发的正特征线和点 2 出发的负特征线交于点  $P$ , 其切线分别为  $PM$  和  $PN$ ; 过  $P$  点的流线与 1、2 两点的连线交于点 3, 曲线特征线可近似为直线, 将特征方程组局部线性化进行差分离散, 用迭代法确定点  $P$  的位置, 同时计算各相关流动变量, 用此法逐排点向下游推进, 可得到布满流场的特征线网及其交点的水深及流速。为保证网格不过度扭曲, 可通过特征线上内插使网格点成排分布于  $y$  方向。用该方法计算了某闸后抛物柱面底扩散陡槽中的急流, 槽底抛物柱面准线方程为:

$$Z(x) = -0.04x - 0.00545x^2$$

陡槽宽度由 1.5 m 在 61.2 m 内扩散至 4 m。  $n = 0.014$ , 进口断面为均匀流, 流速  $U = U_0 = 24.12 \text{ m/s}$ , 水深  $h = h_0 = 0.3 \text{ m}$ 。将算得流速及特征线网绘在一张图上 (图 3), 下半部为特征线网格, 上半部为特征线网格点上的流速; 图 4 为内插

得到的断面流速分布。

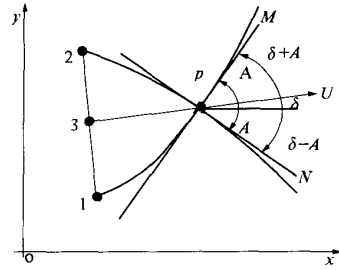


图 2 特征线示意图

Fig. 2 characteristic lines

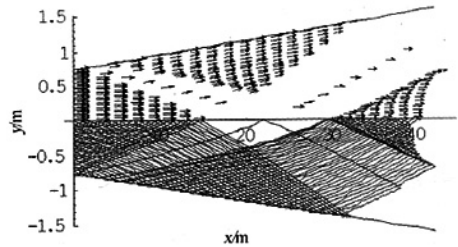


图 3 特征线网格及其上的流速向量

Fig. 3 Characteristic meshes and velocity vectors

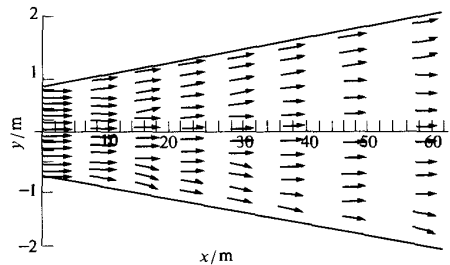


图 4 内插后的流速分布图

Fig. 4 Velocity distribution obtained by interpolation

#### 5 结论

考虑陡槽底部曲率和摩阻效应导出了水深平均流运动方程组, 并由此出发得到急流特征方程组, 由所得方程分析得知: 增大槽底上凸曲率使扰动波角增大, 解释了凸曲面槽底急流沿宽度分散趋向均匀分布的实际物理现象; 最后给出了实际陡槽的特征线解法算例。

#### 参考文献:

- [1] 斯里斯基 C M. 高水头水工建筑物的水力计算 [M]. 毛世民, 杨立信 译. 北京: 水利电力出版社 1984: 123 - 140.

(下转第 140 页)

- clay[J]. Geotech Geoenviron Eng, 1997, 123:1135 - 1142.
- [2] VANIMPE P O, MAZZIERI F, VANIMPE W F. Simulation model for consolidation and contaminant coupled flows in clay layers[J]. Environmental Geotechnics (4thICEG), 2002, 121:189 - 194.
- [3] SMILES D E. Material coordinates and solute movement in consolidating clay [J]. Chem Eng Sci, 2000, 55:773 - 781.
- [4] SMITH D W. One-dimensional contaminant transport through a deforming porous medium: Theory and a solution for a quasi-steady-state problem[J]. Int J Numer Anal Meth Geomech, 2000, 24:693 - 722.
- [5] 朱长军. 低渗透非达西流场中的一维溶质运移模拟[J]. 地球与环境, 2006, 34(1):19 - 22.
- [6] 何庆龙, 林继成. 菲克定律与扩散的热力学理论[J]. 安庆师范学院学报, 2006, 21(3):38 - 40.

## Parameter Influence Analysis of Solute Transport in Deformable Porous Media

PAN Jian, CAI Hong - chao

(College of Civil and Transportation Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

**Abstract:** Formulation for the solute transport in deformable porous media was presented. The formulation was based on the effect of the rate of consolidation or swelling and excess pore pressure or suction dissipation on nonlinear advective component of transport through clay. Three hypothetical cases were evaluated to demonstrate the effect of consolidation, swelling and excess pore pressure on advective-diffusive transport and breakthrough in clay layer. The results show that consolidation in clay impacts concentration profiles, but does not significantly impact breakthrough of the diffusive flux, and consolidation accelerates transport. Swelling under hydraulic gradient application can either accelerate or retard the advective diffusive flux, depending upon the ratio of the effective diffusion coefficient relative to the coefficient of consolidation.

**Key words:** porous media; parameter; clay; solute transport

(上接第 135 页)

- [2] 高双聚, 杨玲霞, 李占松, 等. 盘石头库输水洞弧形工作门下急流控制试验分析[J]. 人民黄河, 1999, 21(8):36 - 37.
- [3] JANSEN P P, BENDGOM L, DEN BERG J V, et al. Principles of River Engineering[M]. London, UK: Pitman publishing Co. Ltd, 1979:40 - 42.
- [4] 谷超豪, 李大潜, 陈恕行, 等. 数学物理方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1979:173 - 202.
- [5] 居余马, 胡金德, 杜翠琴, 等. 线性代数[M]. 第二版, 北京: 清华大学出版社, 2002:132 - 137.
- [6] YE Y J, LI Z, SHI Q C. Asymptotic stability of global solutions for some non linear degenerate hyperbolic equation[J]. 郑州大学学报: 理学版, 2005, 37(1):5 - 8.

## Characteristic Method of Super-critical Flow In Divergent Chute with Curved Bed

Gao Shuang - Ju, Wang Guan - hui

(School of Water Conservancy and Environmental, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

**Abstract:** Depth-mean-flow equations have been derived, through 2-D mean simplification of integration for 3-D flow equations along depth, for super-critical flow in divergent chute with curved bed, in which the influence of curvature, bed slope and bottom friction on flow are considered. Based on depth-mean-flow equations, characteristic equation system are presented. Numerical characteristic FDM solution has been given for a divergent chute with parabolic prismatic bed surface in engineering. Problems for irregular distribution of characteristic mesh points have been solved by interpolating adjustment of computation points for every time step, so that the results can be used conveniently in practical application.

**Key words:** super-critical flow; curved bed surface; divergent chute; characteristics