

文章编号:1671-6833(2008)03-0010-05

混凝土梁裂纹扩展的内聚区模型数值模拟

琚宏昌, 陈国荣

(河海大学 工程力学系, 江苏 南京 210098)

摘 要: 为了对混凝土简支梁进行动荷载下断裂破坏的数值模拟, 运用动力学虚功原理、时间步长、双线性内聚区模型, 采用常规有限元下内聚区模型相结合的方法, 编制了简支梁动态分析的程序代码。借助于商业软件 ABAQUS 强大的前、后处理的功能, 验证内聚单元尺寸应当控制在内聚区长度的二分之一以内。在裂纹开裂后的起始阶段, 裂纹扩展速度较慢, 随后以平稳速度向上传播。算例证明, 常规有限元与内聚区模型相结合的方法在模拟裂纹自然发生的断裂过程方面有着广阔的应用前景。

关键词: 动力学; 内聚区模型; 有限元; 断裂; 数值模拟

中图分类号: TU 311.4

文献标识码: A

0 引言

在各种描写静态和动态断裂问题的数值方法中, 内聚区模型 (CZM) 对于建立断裂模型越来越引起人们的兴趣, 当前被广泛应用于对均匀和非均匀材料系统的模拟。Barenblatt^[1] 1959 年首先提出了可以解释脆性材料裂尖附近原子相互作用的内聚区模型。Needleman^[2] 1987 年运用内聚张力-张开距离关系考虑了夹杂脱胶的情况。Bazant and Cedolin; Bazant and Planas^[3-4] 开发出了反映材料渐进软化行为的模型 (认为张力-张开距离是一个递减函数)。此后, 数值模拟方法采用了内聚区概念。如 Xu and Needleman^[4] 1995 年开发了结合法向和切向张力-张开距离关系基于势形式的模型, 由于简单和采用了势形式, 这种模型后来被广泛使用。此外, Geubelle and Baylor^[6] 1998 年和 Zavattieri and Espinosa^[7] 2001 年提出了双线性模型。Ortiz and Pandolfi^[8] 和 Ruiz et al.^[9] 开发了三维模拟断裂破坏模型。

笔者将常规有限元与内聚元相结合, 采用双线性内聚区模型, 对混凝土简支梁在冲击荷载下的破坏进行了数值模拟, 取得了满意的结果。证明 CZM 方法在模拟裂纹自然发生的断裂过程方面有着光明的前途。

1 数值方法

为了能够使裂纹沿着更加任意的方向扩展, 笔者采用六节点三角形等参元与内聚单元相结合的方法来进行数值计算。CZM 结合描述材料断裂行为的内聚强度和有限功, 可以用来模拟近裂尖的材料行为和裂纹的扩展。图 1 显示出了拉伸 (I 型裂纹) 情况下内聚失效破坏的概念。该图假定内聚区沿着裂纹扩展的方向出现在裂尖的前方。在内聚区范围内, 由于受到裂尖附近高应力状态的影响, 一个材料点 (材料发生破坏前) 可以张开一个距离 Δ (材料发生破坏后)。在内聚区表面存在一个分布张力 T , 这个张力是裂纹表面张开距离 Δ 的函数。分布张力 T 和张开距离 Δ 的关系就是内聚区表面的本构律。如图 1 所示的指数模型中, 随着界面分开 Δ 的增加, 内聚区表面张力 T 一开始平稳地增加, 在临界分开 δ 处达到一个最大值, 然后减少, 并最终在一个特征分开值处消失 (假定此处发生了完全脱胶)。在图 1 中附着于参数的下标 n 的变量表示法向拉伸 (I 型) 断裂情况。在 II 型或混合型断裂情况下, 应当包括切向张力-张开距离的关系。

1.1 有限元方法与内聚区单元的结合

为了将 CZM 与处理动态破坏的数值方法相

收稿日期: 2008-04-30; 修订日期: 2008-06-17

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (50679022)

作者简介: 琚宏昌 (1965-), 男, 河南林州人, 河海大学博士研究生, 主要从事工程力学及混凝土细观力学方面研究。

E-mail: qhc410603@126.com.

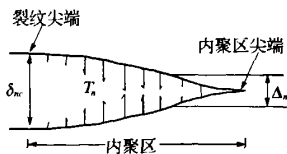


图1 内聚区表面内聚张力分布示意图

Fig.1 Sketch map of the cohesive tractions along a cohesive surface

结合来模拟裂纹的开裂与扩展,引入内聚单元,并将其作为有限元方法的一部分进行处理.将内聚单元沿着裂纹潜在的扩展区域或路径布置,并将其与相应的体积单元(常规有限元)结合在一起.内聚单元能根据内聚表面的张力是否超过内聚表面的脱胶强度而发生脱胶,其本构律嵌入在有限元模型中,因此,内聚单元允许裂纹自然扩展,是一种研究分岔和冲击动力荷载很有前途的方法.

1.1.1 虚功原理

动力学有限元公式的虚功原理可表示为^[5]:

$$\int_{\Omega} (\text{div} \boldsymbol{\sigma} - \rho \ddot{\mathbf{u}}) \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma} (\mathbf{T} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad (1)$$

式中: \$\Omega\$ 表示区域面积(或体积); \$\Gamma\$ 表示法向向量为 \$\mathbf{n}\$ 的边界线(或表面); \$\mathbf{u}\$ 是位移向量; \$\mathbf{T}\$ 是边界张力; \$\boldsymbol{\sigma}\$ 是柯西应力张量; \$\ddot{\mathbf{u}}\$ 表示对时间的微分 (\$\ddot{\mathbf{u}} = \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2\$); \$\rho\$ 是材料密度.考虑存在内聚表面,应用散度定理及式(1)的分部积分法,可以得到下列表达式:

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\epsilon} + \rho \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \mathbf{T}_{\text{ext}} \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \mathbf{T}_{\text{coh}} \cdot \delta \Delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad (2)$$

式中: \$\Gamma_{\text{ext}}\$ 表示在其上作用有外部张力 \$\mathbf{T}_{\text{ext}}\$ 的边界线; \$\boldsymbol{\epsilon}\$ 是格林应变张量.内聚功的贡献由最后一项来表示,该项由内聚张力 \$\mathbf{T}_{\text{coh}}\$ 和跨越距离 \$\Delta \mathbf{u}\$ 在内聚区表面 \$\Gamma_{\text{coh}}\$ 上积分表示.

式(1)和式(2)中的积分是在变形的结构上进行的.对于未变形区的积分,其表达式为:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{S} : \delta \boldsymbol{\epsilon} + \rho \ddot{\mathbf{u}} \delta \mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Gamma_{\text{ext}}} \mathbf{T}_{\text{ext}} \delta \mathbf{u} d\Gamma - \int_{\Gamma_{\text{coh}}} \mathbf{T}_{\text{coh}} \cdot \delta \Delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad (3)$$

式中: \$\mathbf{S}\$ 表示二阶 Piola - Kirchhoff 应力张量,该张量与柯西应力张量 \$\boldsymbol{\sigma}\$ 有关,可表示为^[10]:

$$\mathbf{S} = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^T \quad (4)$$

其中 \$\mathbf{J} = \det \mathbf{F}\$, \$\mathbf{F}\$ 表示变形梯度张量.

1.1.2 动力学方法

笔者采用时间步长中心差分方法^[11]来表示

时间第 \$n\$ 步至 \$n+1\$ 步的节点位移、加速度、速度的更新方法,其表达式为:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{u}}_n \quad (5)$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{H} - \mathbf{R}_{\text{int}(n+1)} + \mathbf{R}_{\text{coh}(n+1)}) \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \frac{\Delta t}{2} (\ddot{\mathbf{u}}_n + \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}) \quad (7)$$

式中: \$\Delta t\$ 表示时间步; \$\mathbf{M}\$ 是质量矩阵; \$\mathbf{H}\$ 是外力向量; \$\mathbf{R}_{\text{int}}\$ 和 \$\mathbf{R}_{\text{coh}}\$ 分别是总体内力向量和内聚力向量.

1.2 波速及时间步长控制

常规有限元方法的稳定性通常由 Courant 条件控制^[11],该条件提供了一个重要的时间步长 \$\Delta t\$ 上限

$$\Delta t \leq \frac{l_c}{C_d} \quad (8)$$

式中: \$l_c\$ 表示在有限元网格中两节点的最短距离; 而扩张波速 \$C_d\$ 可表示为:

$$C_d = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}} \quad (\text{平面应变}) \quad (9)$$

$$C_d = \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)\rho}} \quad (\text{平面应力}) \quad (10)$$

由于波在跨越内聚表面时的不连续,为了确保计算的稳定性,内聚单元要求波以更短的时间步长传播.时间步长的缩短取决于单元尺寸、内聚力强度和材料刚度.

1.3 内聚区模型

正如文献[12]所讨论的那样,内聚单元的嵌入给结构引入了人为柔度.这种影响是 CZM 方法所固有的.然而,如果正确处理,这种人为柔度能被限制在一定的限度内.在该限度之内,仍然可以对所研究的问题进行可靠的数值模拟.引入的人为柔度主要与张力-张开距离律的初始坡度有关:坡度越陡,表示体积单元之间有越强的初始胶结,引入的人为柔度越少.

采用双线性内聚模型有利于调整这种坡度. Zavattieri and Espinosa^[7] 2001 年提出了一种双线性内聚区模型,在模型中当参数 \$\lambda\$ (一个法向和切向张开距离的函数)等于 1 时材料失效. \$\lambda\$ 的表达式可表示为:

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{\Delta_n}{\delta_n}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_t}{\delta_t}\right)^2} \quad (11)$$

式中:参数 \$\Delta_n, \Delta_t\$ 分别是当前法向和切向内聚表面张开距离;而 \$\delta_n, \delta_t\$ 分别是张开距离临界值.当张开距离 \$\Delta_n\$ 和 \$\Delta_t\$ 分别达到 \$\delta_n\$ 和 \$\delta_t\$ 临界值时,认为

界面分别以两种方式(法向和切向)失效了。相似于 Geubelle and Baylor^[6]1998 年的模型,可以选择“临界张开距离”值 λ_{cr} 来确定内聚律的初始坡度。明显地, λ_{cr} 的值应当接近于零,以确保内聚区的初始胶结。内聚律可表示为:

$$T_n = T_n^{\max} \frac{\Delta_n}{\delta_n} \cdot \frac{1 - \lambda^*}{\lambda^* (1 - \lambda_{cr})} \quad (12)$$

$$T_t = T_t^{\max} \frac{\Delta_t}{\delta_t} \cdot \frac{1 - \lambda^*}{\lambda^* (1 - \lambda_{cr})} \quad (13)$$

其中 λ^* 可表示为

$$\lambda^* = \begin{cases} \lambda_{cr} & (\lambda \leq \lambda_{cr}) \\ \lambda & (\lambda > \lambda_{cr}) \end{cases} \quad (14)$$

对于 I 型裂纹情形,张力-张开距离关系见图 2。为了保持界面弱化的不可逆性,在整个加载历史中,参数 λ 始终保持为最大值。

对于常张力-张开距离关系而言,内聚区长度的静态分析估计值^[13]为:

$$l_k = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \frac{G_{1c}}{T_{ave}^2} \quad (15)$$

其中对于指数内聚律, $T_{ave} = 0.453 T_{\max}$; G_{1c} 为断裂能。

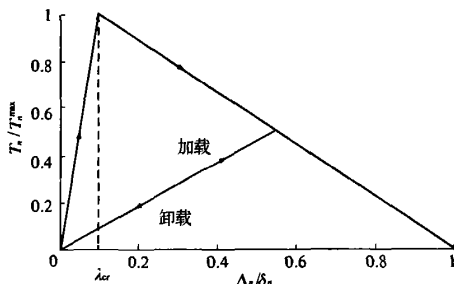


图 2 法向张力-张开距离双线性内聚模型

Fig. 2 Bilinear cohesive model for normal traction-separation

2 算例

采用 Rousseau and Tippur^[14]2001 年的方法与笔者提出的内聚模型相结合,对带有切口的混凝土简支梁进行冲击荷载数值模拟。对于混凝土这样的准脆性材料,其变形量一般都比较小。对于带凹口的混凝土简支梁,断裂过程相对简单,可以采用小变形、I 型裂纹控制。裂纹扩展路径是沿着一条预定的直线。

2.1 问题的描述

混凝土简支梁的几何与边界条件见图 3。该梁承受速度为 10 m/s 的冲击荷载,该荷载作用于

梁的上表面中点,在梁的下表面中点有一个初始长度为 10 mm 的初始裂纹。为了简化计算,将简支梁视为均质材料,数值试验数据采用文献[15]的实验数据:砂粒体积分数 $V_f = 0.4$,弹性模量 $E = 42.15$ GPa,泊松比 $\gamma = 0.246$ 。

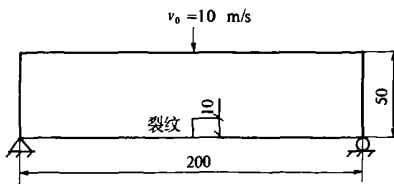


图 3 在冲击载荷作用下混凝土梁的几何和边界条件

Fig. 3 Geometry and boundary conditions for concrete beam under impact loading

2.2 裂纹扩展的不连续问题

采用三角形六节点单元对试件进行离散。内聚单元沿梁中点(对称线)进行布置,裂纹将沿着确定的路径传播。

基于上一节的讨论,内聚单元尺寸的选择应当考虑内聚区尺寸 l_k (方程式(14))、最大内聚强度 T_{\max} 和临界张开位移 δ_{cr} 。一个高的内聚强度,如 $E/T_{\max} = 10$,将导致一个更短的内聚区尺寸,因而将引起一个更严格的单元尺寸要求。在这个问题中, $E/T_{\max} = 10$ 给出大约为 21.6 μm 的内聚区尺寸。根据 Geubelle and Baylor^[6]的收敛性要求,单元尺寸应当在内聚区尺寸的 1/3 至 1/2 之间,因此,单元尺寸最大应为 11 μm 。这样的单元尺寸会导致一个相当大的节点和单元数,引起繁重的计算量和相当长的计算时间。然而,由于内聚单元是沿着确定的路径或区域嵌入的,我们可以假定使用一个较低的 T_{\max} 值使引入结构的柔度值不太大。引入结构的弹性柔度可以类似于 Zavattieri and Espinosa^[7]进行估计:

$$E_{add} = \frac{T_{\max}}{\delta} \times b_s = \frac{E/50}{0.4 \times 10^{-6}} \times 100 \times 10^{-3} = 5\,000E \quad (16)$$

式中, b_s 是梁的一半长度。内聚单元嵌入之前和之后结构的柔度之比为 $1:1/(1+1/5\,000) = 1.000\,2:1$ 。因此,采用 $E/T_{\max} = 50$,这个值将导致 $l_k = 363$ μm 。体积单元尺寸引用 180 μm ,因此内聚区至少跨越 2 个内聚单元,基本在收敛要求之内。

如果采用不充分精致的网格,将会违背收敛准则,那么一个裂纹会出现在主裂纹的前方。例如,当采用 $E/T_{\max} = 10$,单元尺寸保持在 180 μm ,这个尺寸比内聚区尺寸 $l_k = 21.6$ μm 大了许多,

就会发生图4所示的情况,即在裂纹尖端节点完全脱胶之前,一些裂尖前面的节点已经脱开。

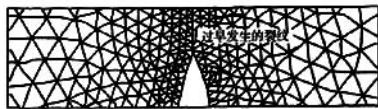


图4 主裂纹前方过早发生的裂纹示意图

Fig.4 Sketch map of premature crack ahead of main crack

2.3 结果

首先,给出了简支梁在冲击载荷作用下的结果。图5为裂尖位置与时间的关系曲线。其中扩张波速 C_d 由平面应力情况下的材料特性常量(E , ρ , ν)通过式(10)确定。

图5表明在裂纹开裂之后,裂纹尖端似乎保持在一个“稳定水平”大约130 μm ,在此期间,裂纹前进很少。借助于商业软件ABAQUS强大的前后处理功能,对各个时间步梁的变形和应力分布进行对比分析,可以这样解释这种现象:当冲击荷载作用在梁的上表面时,一个压应力波向下传播,然后在梁的底面反射回来,作为拉应力波再向上传播。与此同时,由于速度连续性,后面的波也向下传播并反射。这种前后传播的波相互叠合的组合结果变得相当复杂。在裂尖,作为裂纹扩展主要动力的应力 σ_x 并不单调增加。事实上,可以观察到在一定的模拟阶段,裂纹口张开位移(CMOD)先增大,然后减小,再增大。在早期阶段,原始裂尖的应力达到临界值时,一对节点分裂,然后经过另一段时间间隔,应力达到相同高度时下一对节点分裂,这就是“稳定水平”阶段。然而,从长期来看,弯曲作用支配着裂尖的波效应,随着局部变形不断单调增加,裂纹以更快的速度传播。

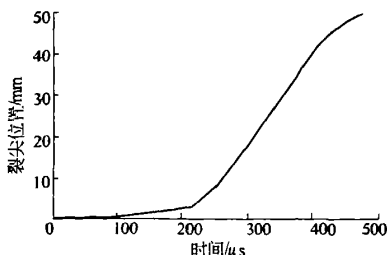


图5 裂尖位置与时间的关系曲线

Fig.5 Relation curve of crack tip location and time

图6是三点弯曲梁在裂纹开裂后在不同时间 $t=200 \mu\text{s}$, $t=360 \mu\text{s}$ 的应力分布图。由图6可见,裂尖始终是应力集中程度最高的区域,同时也验证了裂纹沿着内聚单元布置的方向扩展。

证了裂纹沿着内聚单元布置的方向扩展。

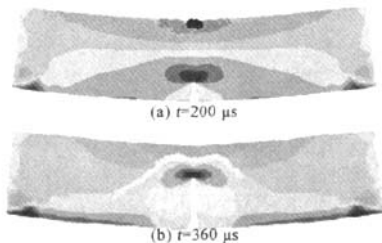


图6 三点弯曲梁的应力分布图

Fig.6 Stress distributions for three-point-bending beam

在裂纹扩展方向的10 mm范围内对称布置内聚单元来验证内聚区模型的适用性,数值计算结果与图5和图6结果一致,表明内聚区模型完全可以用来模拟任意方向裂纹的扩展。

3 结论

(1)采用体积单元和内聚单元数值模拟了混凝土简支梁在动荷载作用下的动力学破坏行为。由于内聚单元的存在,程序代码需要采用控制时间步的动力学方法。为了保证计算收敛性,内聚单元尺寸应当限制在内聚区尺寸的二分之一范围内。

(2)对于采用内聚模型来模拟材料破坏的方法而言,适合采用双线性模型。这种模型可以调整张力-张开距离曲线的初始刚度,可以有效地限制引入系统的人为柔度。

(3)数值模拟结果表明:内聚模型能够定性地捕捉到混凝土材料断裂的演化特点,但在数量上的吻合需要对内聚区模型参数进一步校准。对于模拟无预定破坏准则的广义破坏来说,内聚方法是一种很有前途的方法。

参考文献:

- [1] BARENBLATT G I. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture: General ideas and hypothesis, axially symmetric cracks[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1959, 23: 622-636.
- [2] NEEDLEMAN A. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding[J]. Journal of Applied Mechanics, 1987, 54: 525-531.
- [3] BAZANT Z P, CEDOLIN L. Stability of structures: elastic, inelastic, fracture and damage theories[M]. New York: Oxford University Press, 1991.
- [4] BAZANT Z P, PLANAS J. Fracture and size effect: In concrete and other quasibrittle materials[M]. New York: CRC Press, 1998.

- [5] XU X, NEEDLEMAN A. Numerical simulations of dynamic crack growth along an interface[J]. *International Journal of Fracture*, 1995, 74: 289 – 324.
- [6] GEUBELLE P H, BAYLOR J. Impact – induced delamination of laminated composites: a 2D simulation [J]. *Composites Engineering Part B*, 1998, 29: 589 – 602.
- [7] ZAVATTIERI P, Espinosa H. Grain level model analysis of crack initiation and propagation in brittle materials[J]. *Acta Materialia*, 2001, 49: 4291 – 4311.
- [8] ORTIZ M, PANDOLFI A. Finite – deformation irreversible cohesive elements for three – dimensional crack propagation analysis [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1999, 44: 1267 – 1282.
- [9] RUIZ G, PANDOLFI A, ORTIZ M. Three – dimensional cohesive modeling of dynamic mixed – mode fracture[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 52: 97 – 120.
- [10] BELYTSCHKO T, LIU W K, MORAN B. *Nonlinear finite elements for continua and structures*[M]. New York: Wiley, 2000.
- [11] BATHE K J. *Finite Element Procedures*[M]. New Jersey: Prentice – Hall, 1996.
- [12] ZHANG Z. *Cohesive zone modeling of dynamic failure in homogeneous and functionally graded Materials*[D]. Urbana Champaign: University of Illinois, 2003.
- [13] RICE J R. *Mathematical analysis in the mechanics of fracture*[J]. New York: Academic Press, 1968: 191 – 311.
- [14] ROUSSEAU C E, TIPPUR H V. Dynamic fracture of compositionally graded materials with cracks along the elastic gradient: experiments and analysis [J]. *Mechanics of Materials*, 2001, 33: 403 – 421.
- [15] WANG J A, LUBLINER J, MONTEIRO P J M. Effect of ice formation on the elastic moduli of cement paste and mortar[J]. *Cem Concr Res*, 1988, 18(6): 874 – 885.

Numerical Simulation of Crack Propagating Using Cohesive Zone Model

QU Hong – chang, CHEN Guo – rong

(Department of Engineering Mechanics, Hehai University, Nanjing 210098, China)

Abstract: In order to simulate numerically fracture of simply supported beam of concrete under impact loading, program code is developed for simply supported beam to be analyzed dynamically using the principle of virtual work, controlling length of the time step, bilinear cohesive model and adopting combinative method of general finite element and cohesive element. With the help of the powerful pre – and post – disposal functions of commercial software ABAQUS, it is verified that the size of the cohesive element should be limited within one half of length of the cohesive zone. At the initiation phase, the crack propagates slowly, and then extends upward smoothly. Examples illustrate that the combinative method of general finite element and cohesive element has the promise of simulating fracture process where cracking occurs spontaneously.

Key words: dynamics; cohesive zone model; finite element; fracture; numerical simulation