

文章编号:1671-6833(2007)01-0051-05

一种计入剪力滞及剪切变形效应的箱梁 自振频率计算方法

张永健, 黄平明

(长安大学 桥梁与隧道陕西省重点实验室, 陕西 西安 710064)

摘要: 由于剪力滞效应及剪切变形的存在,箱梁的弯曲振动频率按照初等梁理论计算往往存在较大的误差.综合考虑箱梁的剪切变形及剪力滞效应,利用能量变分原理分析简支箱梁的自由振动,推导出考虑剪力滞效应及剪切变形的简支箱梁的各阶自振频率的解析解,较以前只能计算振动基频有所推广.验证算例计算表明本文方法理论推导正确,计算精度较初等梁理论大大提高.最后对剪力滞效应及剪切变形对箱形梁自振特性的影响进行了讨论,发现考虑剪力滞效应以及考虑剪切变形均使简支箱梁的振动基频降低,且对于箱梁的高阶振动频率降低程度尤为明显;而箱梁的宽跨比是影响其降低程度的最重要因素.

关键词: 剪力滞后;剪切变形;简支箱梁;固有振动;变分原理

中图分类号: U 448.21

文献标识码: A

0 引言

箱形截面以其自重小、抗弯、抗扭性能好和跨越能力强等特点在土木工程尤其是桥梁上得到大量的运用.按照初等梁理论,受横向荷载作用的箱梁,通常假定箱梁顶底板的纵向正应力沿顶底板宽度方向为均匀分布,但该假定对于具有较宽的翼缘板的箱梁会带来很大的误差.由于箱梁顶底板的剪切变形使得其横截面上的纵向正应力分布并不均匀,而这种现象称为剪力滞效应.最早涉入剪力滞研究的是 Von Karman(1923),后来 Reissner^[1]第一次成功地运用能量变分法分析了双对称矩形箱梁的剪力滞问题.他假定翼板的纵向位移沿横向按二次抛物线分布,获得了应力和挠度的闭合解.其后国内学者郭金琼教授等^[2]在 Reissner 微分方程的基础上,将翼板纵向位移沿横向分布函数修改为3次抛物线,并用模型和数值分析加以验证.文献[3~6]推广和发展了剪力滞剪力滞的理论分析方法.但对于剪力滞效应的研究也基本上集于静力分析,对于考虑箱梁剪力滞影响箱梁的动力分析方面研究的论文很少,箱梁

的动力计算也一般以有限元为主.文献[7]分析推导了箱形截面梁的弯曲振动方程及其自然边界条件,作为特例利用 MATLAB 软件对一简支箱梁的固有频率方程进行了求解,精度较高但计算过程较麻烦,实用上不方便.文献[8]通过假定纵向最大位移差函数的分布导出了简支箱梁的振动基频的解析解,并用数值方法进行了验证.其公式简单,计算方便,但由于未考虑箱梁的剪切变形,计算结果仍存在一定的误差,且其只能计算箱梁自振的基频,没有给出高阶频率计算公式.所以本文同时考虑了剪力滞及剪切变形的影响,推导能同时计入剪力滞及剪切变形影响的简支箱梁自振各阶频率的解析解,是对文献[8]的推广,而文献[8]即相当于本文不考虑剪切影响且取振动阶次 $n=1$ 的特例.

1 基本假定与位移函数

1.1 基本假定

参照文献[8],对于箱梁的在弯曲振动时候的基本假定有:

(1) 如图1所示,箱梁在对称挠曲时上下翼

收稿日期:2006-09-18;修订日期:2006-11-27

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10072041)

作者简介:张永健(1978-),男,湖南邵东人,长安大学博士研究生,主要从事桥梁结构的分析研究工作.

板的纵向(轴方向)变形不符合平截面假定. 假定上下翼板的纵向位移沿翼板横向(轴方向)为 3 次抛物线分布.

(2) 腹板的纵向位移符合平截面假定.

(3) 忽略翼板纵向纤维间的竖向及横向挤压变形, 忽略翼板平面外的剪应变, 即, $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$, $r_{yz} = r_{xz} = 0$.

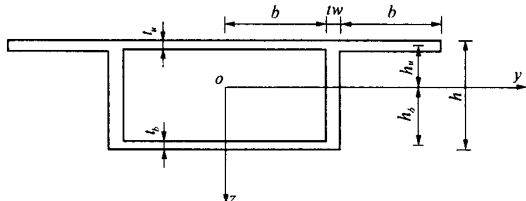


图 1 箱梁截面

Fig. 1 Cross-section of box girder

1.2 位移函数

根据基本假定, 箱梁在弯曲变形时, 翼板已不符合平截面假定. 所以位移函数包括梁的竖向(z 轴方向)位移 $w = w(x, t)$ 和翼板的纵向位移函数 $u = u(x, y, t)$, 即位移函数可取为

$$w = w(x, t) \quad (1)$$

$$u(x, y, t) = h_i \left\{ \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + \left[1 - \frac{y^3}{b^3} \right] u(x, t) \right\} \quad (2)$$

式中: $u(x, y, t)$ 为箱梁的纵向位移; $u(x, t)$ 为剪切转角的最大差值; b 为箱室净宽的一半; h_i 为截面形心到上或下板的距离.

由文献[8]可知, $u(x, t)$ 沿箱梁轴线分布取余弦函数可得到良好的近似, 现沿向纵仍用余弦函数进行近似替代. 但考虑箱梁的多阶弯曲振动, 取

$$u(x, t) = u_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

考虑到箱梁在振动过程中会发生剪切变形, 梁的基本振动方程须用截面形心轴的挠度 w 和截面转角 θ 两个变量来表示. 图 2 是梁微元变形图, 由于考虑剪切变形 γ 的影响, 梁截面的转角 θ 与挠度曲线倾角 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 不再相等, 它们之间的关系为

$$\gamma = \frac{\partial w}{\partial x} - \theta \quad (4)$$

与初等梁的振动分析方法相同, 对于箱梁的竖向位移 w 及梁截面的转角 θ 取沿纵向分别成正弦函数以及余弦函数分布, 即

$$w(x, t) = w_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

$$\theta(x, t) = \theta_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

将式(3)、式(5)代入式(2), 得箱梁的纵向位移函数为

$$u(x, y, t) = h_i \left\{ w_0 \frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \left[1 - \frac{y^3}{b^3} \right] u_0 \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \right\} \times \sin(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

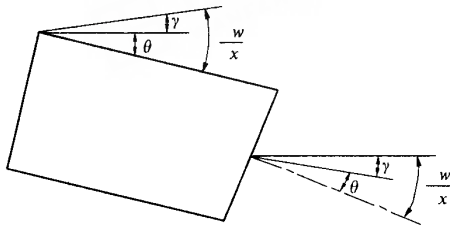


图 2 箱梁的剪切变形

Fig. 2 Shear deformation of cross-section of box girder

2 箱梁的应变能及动能

2.1 箱梁的应变能

箱梁的应变能主要包括箱梁梁肋的弯曲应变能、箱梁的竖向剪切应变能以及箱梁上下翼板由剪力滞效应产生的应变能.

其中箱梁梁肋弯曲应变能为

$$U_1 = \frac{1}{2} \int EI_w \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx \quad (8)$$

将式(6)代入式(8)积分, 可得

$$U_1 = \frac{n^2 \pi^2 EI_w \theta_0^2}{4l} \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (9)$$

式中: I_w 为箱梁肋板对截面形心惯性矩.

箱梁竖向剪切应变能为

$$U_2 = \frac{1}{2} \int \frac{GA}{k} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \int \frac{GA}{k} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta \right)^2 dx \quad (10)$$

式中: k 为箱形截面的剪切系数.

将式(5)、式(6)代入式(10)积分可得

$$U_2 = \frac{GA(l\theta_0 - n\pi w_0)^2}{4kl} \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (11)$$

箱梁上、下翼板由剪力滞产生的应变能为

$$U_3 = \int \int_0^b E \varepsilon d\varepsilon dV + \int \int_0^b G \gamma d\gamma dV \quad (12)$$

根据基本假定(3), 只有应变 ε_x, r_{yx} 不为 0, 且

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -h_i \left[w_0 \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + \left(1 - \frac{\gamma^3}{b^3}\right) \right. \\ \quad \times u_0 \frac{n\pi}{l} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \left. \right] \sin(\omega t + \varphi) \\ r_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} = h_i \frac{3\gamma^2}{b^3} u_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (13)$$

对式(12)积分可得

$$\begin{aligned} U_3 = & \left(\frac{n^2 \pi^2 EI \theta_0^2}{4l} + \frac{3}{8l^2} n^3 \pi^3 EI w_0 u_0 \right. \\ & + \frac{9}{56l} n^2 \pi^2 EI u_0^2 + \frac{9}{20b^2} GI u_0^2 l \left. \right) \sin^2(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (14)$$

式中: I_x 为箱梁顶底板对截面形心惯性矩。

箱梁总应变能即为以上3部分之和,即

$$\begin{aligned} U = U_1 + U_2 + U_3 \\ = & \left(\frac{n^2 \pi^2 EI \theta_0^2}{4l} + \frac{3n^3 \pi^3 EI w_0 u_0}{8l^2} \right. \\ & + \frac{9n^2 \pi^2 EI u_0^2}{56l} + \frac{9GI u_0^2 l}{20b^2} + \frac{n^2 \pi^2 GA w_0^2}{4kl} - \frac{n\pi GA w_0 \theta_0}{2k} \\ & + \left. \frac{GA l \theta_0^2}{4k} \right) \cdot \sin^2(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (15)$$

式中: I 为箱梁截面抗弯惯性矩, $I = I_x + I_y$ 。

2.2 箱梁的动能

考虑到箱梁中竖向振动的主导地位,结构的总动能 T 可表示为

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \rho \int_A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dA dx \quad (16)$$

将式(5)代入式(11)积分可得

$$T = \frac{1}{4} \rho A w_0^2 \omega^2 l \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (17)$$

3 箱梁各阶弯曲振动频率

在弹性小变形前提下,箱梁结构自由振动时无外力作用,所以无外力势能,即有 Hamilton 原理的变分形式

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - T) dt = 0 \quad (18)$$

式中: U, T 分别为振动引起的应变能和动能。

对式(13)在0到 $\frac{2\pi}{\omega}$ 内积分可得

$$\delta \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (U - T) dt = \delta H = 0 \quad (19)$$

式中:

$$H = \frac{1}{k\omega} \left(\frac{n^2 \pi^2 EI \theta_0^2}{4l} + \frac{3n^3 \pi^3 EI w_0 u_0}{8l^2} + \frac{9n^2 \pi^2 EI u_0^2}{56l} \right.$$

$$\begin{aligned} & + \frac{9GI u_0^2 l}{20b^2} + \frac{n^2 \pi^2 GA w_0^2}{4kl} - \frac{n\pi GA w_0 \theta_0}{2k} + \frac{GA l \theta_0^2}{4k} \\ & \left. - \frac{\rho A l w_0^2 \omega^2}{4} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

式(15)对变量 w_0, u_0 进行变分,可得

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial w_0} \delta w_0 + \frac{\partial H}{\partial u_0} \delta u_0 + \frac{\partial H}{\partial \theta_0} \delta \theta_0 = 0 \quad (21)$$

所以有

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial w_0} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial u_0} = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial \theta_0} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

即有

$$\mathbf{M} \{w_0 \quad u_0 \quad \theta_0\}^T = 0 \quad (23)$$

式中:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 4\rho A \omega^2 l^3 k - 4n^2 \pi^2 GA l & -3n^3 \pi^3 EI k & 4n\pi GA l^2 \\ 35n^3 \pi^3 EI b^2 & 30n^2 \pi^2 EI b^2 + 84GI^3 & 0 \\ -GA n \pi l & 0 & n^2 \pi^2 EI k + GA l^2 \end{bmatrix}$$

式(23)是关于 w_0, u_0, θ_0 的一个二元一次方程组,由其有非0解,可知其系数行列式为0,即可得

$$\omega = (1 - \alpha_1 - \alpha_2) \sqrt{\frac{n^4 \pi^4 EI}{l^4 m}} \quad (24)$$

式中:

$$\bar{m} = \rho A;$$

$$\alpha_1 = \frac{35n_1}{40 + \frac{448}{(n\pi)^2} n_2 n_3} \quad (25)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{(n\pi)^2} n_2 n_4} \quad (26)$$

$$\text{式中: } n_1 = \frac{I_x}{I}; n_2 = \frac{G}{E}; n_3 = \frac{l}{2b}; n_4 = \frac{Al^2}{kI} = \frac{1}{k} \left(\frac{l}{r} \right)^2; r = \sqrt{\frac{I}{A}} \text{ 为横截面的回转半径。}$$

对比文献[8],可知 α_1 即为考虑剪力滞效应振动频率的降低值, α_2 即为考虑剪切变形带来的振动频率降低值。而文献[8]即为本文不考虑剪切影响($\alpha_2 = 1$)且取振动阶次 $n = 1$ 的特例。

4 算例

对于一简支箱形截面梁,其几何参数及材料参数为: $t_w = 0.4 \text{ m}$, $t_u = 0.25 \text{ m}$, $t_b = 0.25 \text{ m}$, $b = 2.75 \text{ m}$, $E = 3.5 \times 10^4 \text{ MPa}$, $h = 3 \text{ m}$, $A =$

6.525 m², $\rho = 2\,500\text{ kg/m}^3$, $G/E = 0.43$ 。一般梁理论(按照杆系结构计算)、本文方法(考虑剪力滞效应)及有限元计算结果对比见表1,其中有限元结果是将箱梁采用8节点实体单元进行网格划分,在通用有限元程序中进行计算,由于采用实体单元进行三维分析,程序可自动计入剪力滞效应。从表1的计算结果可以看出:根据作者推导公式计算的箱梁各阶自振频率与精确解(有限元结果)非常接近,说明作者的计算方法的正确性和可靠性。由于公式推导过程中同时考虑了箱梁的剪力滞效应与箱梁的剪切变形,因而相对于只考虑剪力滞计的算精度有较大的提高,且低阶振动频率精度较高,随着振动频率的增加,精度逐步下降。又由于宽箱梁的横向抗畸变刚度较小,导致现局部振动阶次提前,因而整体的竖向弯曲高阶振动没有出现。

表1 简支箱梁固有频率

Tab.1 Natural vibration characteristics of simply supported box girder

梁长 /m	跨宽比 l/2b	计算方法	振动频率 $\omega/(\text{rad} \cdot \text{s}^{-1})$		
			一阶	二阶	三阶
30	5.455	一般梁理论	48.110	192.439	432.987
		本文方法	42.003	111.163	119.511
		有限元法	41.225	91.111	—
35	6.364	一般梁理论	35.346	141.384	318.113
		本文方法	32.028	94.473	127.104
		有限元法	31.731	80.110	—
40	7.273	一般梁理论	27.062	108.247	243.555
		本文方法	25.123	79.496	121.416
		有限元法	25.013	70.301	—
45	8.182	一般梁理论	21.382	85.528	192.439
		本文方法	20.185	67.030	111.163
		有限元法	20.150	61.577	101.731

说明:表中“-”为有限元计算中没有出现明显的相应阶次的整体振动

5 结论

(1)推导了同时考虑剪力滞效应及剪切变形的简支箱梁的自由振动各阶频率计算公式,得到了闭合解,算例计算表明其计算精度较好。

(2)相对于不考虑剪力滞(一般梁理论)或者只考虑剪力滞^[8],本文计算结果精度有了显著提高,且该公式不仅能计算振动基频,也可以计算任意高次振动频率。

(3)相对于不考虑剪力滞效应,考虑剪力滞

效应后箱梁的自振基频降低,且降低 α_1 倍。考虑剪切变形后箱梁的自振基频也降低且降低 α_2 倍,并且随着计算频率阶次的升高,考虑剪力滞效应以及考虑剪切变形带来的频率降低程度也越大,即在计算高阶频率时,更需要考虑剪力滞效应及剪切变形带来的影响。

(4)从式(25) α_1 表达式可以知:箱梁的顶底板占的比重(I_s/I)越大频率降低越多;而箱梁的跨宽比($l/2b$)越小频率降低的也越多。从式(26) α_2 表达可以知:箱形截面的剪切系数越大,频率降低的越多;跨高比(l/r)越小,频率降低的也越多。

(5)文中推导的公式虽然可以计算高阶振动频率,但精度随着阶次的增加而降低,且在箱梁的振动中又有局部振动的参与,高阶的整体弯曲振动不一定出现,而对于箱梁局部振动的计算有待于进一步研究。

参考文献:

- [1] REISSNER E. Analysis of shear lag in box beams by principle of minimum potential energy[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1946, 5 (3): 268-278.
- [2] 郭金琼,房贞政,罗登孝. 箱形梁桥剪力滞效应分析[J]. 土木工程学报, 1983, 16 (1): 1-13.
- [3] 钱寅泉,倪元增. 单室箱桥的剪力滞分析[J]. 中国公路学报, 1989, 2 (2): 28-38.
- [4] CHANG S T. Prestress influence on shear lag effect in continuous box girder bridge[J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1992, 118 (11): 3113-3121.
- [5] SINGH Y, NAGPAL A K. Negative shear lag in framed-tube buildings [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1994, 120 (11): 3105-3121.
- [6] 罗旗帜. 薄壁曲箱梁桥剪滞效应分析[J]. 铁道学报, 1999, 21(5): 88-93.
- [7] 甘亚南,吴亚平,王根会. 剪力滞效应对接支箱梁自振特性的影响研究[J]. 兰州铁道学院学报, 2002, (3): 23-25.
- [8] 张永健,黄平明. 考虑剪力滞效应的简支箱梁自振特性[J]. 建筑科学与工程学报, 2005, 22 (2): 40-42.
- [9] 周勇军,赵小星,贺拴海,等. 弯钢箱梁桥的动力分析及模态试验[J]. 郑州大学学报(工学版), 2005, 26 (4): 20-24.

A New Method to Calculate the Natural Frequencies of Simply Supported Box Girder Including the Effect of Shear Lag and Shear Deformation

ZHANG Yong-jian, HUANG Ping-ming

(Key Laboratory for Bridge and Tunnel of Shaanxi Province, Chang'an University, Xi'an 710064, China)

Abstract: The vibration frequency of box girder is usually calculated by the elementary beam theory, but it will lead to a large error because of the existence of shear lag effect and shear deformation. Based on energy variational principle, this paper proposes a new method to calculate the vibration of simply supported box girder, which includes the effect of shear lag and shear deformation, and the closed-form solutions to the natural frequencies are derived. It extends the usage of the methods of the past. Numerical examples show the analysis is feasible and the precision is improved greatly compared with the elementary beam theory. Finally, the effect of shear lag and shear deformation to the vibration of box girder is discussed. It is found that the natural frequencies of simply supported box girder decreases when the effects of shear lag or shear deformation is taken into account, especially in the high order frequencies' calculation, and the decrease is closely related to the width span ratio of the box girder.

Key words: shear lag; shear deformation; simply supported box girder; natural frequencies; variational principle

(上接第 29 页)

参考文献:

- [1] 陈准金. 可控串联补偿在提高电力系统稳定性中的作用研究[J]. 电力系统自动化, 1996, 20(10): 14 - 17.
- [2] ZHOU X X, LIANG J. Nonlinear adaptive control of TCSC to improve the performance of power system[J]. IEE Proc-G, 1999, 146(3): 301 - 305.
- [3] 陈菊明, 梅生伟, 刘 锋. 多机系统 TCSC 多目标控制
- [4] 卢 强, 孙元章. 电力系统非线性控制[M]. 北京: 科学出版社, 1993. 47 - 93.
- [5] 王锡凡. 现代电力系统分析[M]. 北京: 科学出版, 2003. 212 - 216.
- [6] 刘金琨. 先进 PID 控制及其 MATLAB 仿真[M]. 北京: 电子工业出版社, 2003. 1 - 3.

Study on Nonlinear PID Controller for TCSC in Multi-Machine System

WANG Ke-wen¹, ZHU Yong-sheng¹, DONG Yan²

(1. School of Electrical Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China; 2. School of Electric and Information Engineering, Zhongyuan Institute of Technology, Zhengzhou 450007, China)

Abstract: TCSC impedance control is the foundation of other control functions of the TCSC, and the system layer controller can show exactly the change of the objective parameters based on the given control schemes. This paper takes the advantage of both nonlinear and PID controller and designs a compositive controller using the nonlinear controller in the system layer and the PID controller in the middle layer. It uses the local information and is not dependent on the system's accurate model and parameters. The Matlab/Simulink software is used to build the detailed model of the TCSC and the two-area four-machine TCSC system. The simulation results indicate the good performance of the TCSC controller on power systems.

Key words: multi-machine system; TCSC; nonlinear; PID