

文章编号: 1671-6833(2006)04-0089-03

# 功能梯度板条Ⅲ型裂纹问题研究

程站起, 卢纪富

(郑州大学土木工程学院, 河南 郑州 450001)

**摘 要:** 现存文献关于梯度材料断裂问题的研究大都是假设材料性质为坐标的指数函数或幂函数, 而对其它函数形式较少采用. 作者假设功能梯度材料剪切模量的倒数为坐标的线性函数, 而泊松比为常量, 研究功能梯度板条的反平面裂纹问题. 利用 Fourier 积分变换技术和传递矩阵法将混合边值问题化为一对奇异积分方程, 通过数值求解奇异积分方程获得板条裂纹在反平面载荷作用下的应力强度因子, 并讨论了裂纹相对尺寸以及材料非均匀性对应力强度因子的影响.

**关键词:** 功能梯度材料; 裂纹; 应力强度因子; 板条

**中图分类号:** O 344.3 **文献标识码:** A

## 0 引言

功能梯度材料一般有两种材料复合而成, 并且材料组分在一定的空间上连续变化的一种复合材料. 由于这类材料的力学和热学参数连续变化没有突变, 因而可以大大缓解应力集中. 对于功能梯度材料, 目前有相当多的研究者进行关于材料的不均匀性对各种失效机理影响的研究. 然而由于其组分在空间连续变化, 即其材料参数在空间上按一定的规律变化, 使得该种材料的力学分析相当复杂. Eischen<sup>[1]</sup>研究了非均匀弹性性质对裂纹尖端应力场的影响, 研究结果表明对于物性参数连续变化的非均匀材料的裂纹尖端奇异场具有和均匀材料相同的奇异性. Hu<sup>[2]</sup>和 Jin 等<sup>[3]</sup>分别研究了材料剪切模量为指数函数分布时反平面裂纹问题. Li<sup>[4]</sup>则研究了材料剪切模量为幂函数形式时, 功能梯度板条中的反平面裂纹问题. 目前有关功能梯度断裂研究的论文大都假设材料常数的梯度按指数函数或幂函数分布, 对于其他函数形式则很少研究, 但事实上功能梯度材料的物性参数变化形式可以为任意函数形式, 因此有必要研究其他函数形式的功能梯度材料的断裂特性.

作者研究剪切模量的倒数为线性函数分布, 而泊松比为常数的功能梯度板条Ⅲ型裂纹问题. 采用积分变换, 将混合边值问题转化为一对奇异

积分方程. 通过数值求解奇异积分方程获得Ⅲ型裂纹应力强度因子. 考察了材料的非均匀性和结构尺寸等参数对应力强度因子的影响.

## 1 问题描述与基本方程

考虑如图 1 所示的功能梯度板条, 上下边界自由, 在裂纹面上承受反平面应力载荷. 假设功能梯度板条的厚度为  $2h$ , 贯穿裂纹的长度为  $2a$ . 为了便于分析, 将直角坐标系的原点固定在裂纹面上.

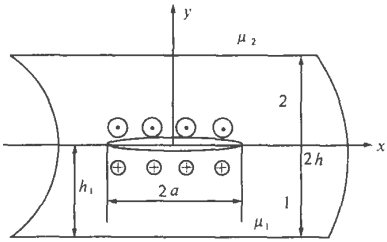


图 1 功能梯度板条Ⅲ型裂纹

Fig. 1 A mode III crack in a functionally graded strip

取如图 1 所示的坐标系, 假设材料的剪切模量  $\mu$  和倒数为坐标  $y$  的线性函数, 即

$$\mu(y) = \mu_1 / [1 + p(y + h_1)] \quad (1)$$

其中,  $p, \mu_1$  为常数, 而泊松比  $\nu$  保持为常量. 对于反平面变形问题, 根据弹性体物理方程和几何方程, 可以得到用位移表示的平衡方程为

收稿日期: 2006-07-18; 修订日期: 2006-09-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10072041)

作者简介: 程站起(1973-), 男, 河南西华人, 郑州大学讲师, 博士, 主要从事固体力学方面的研究.

$$\Delta^2 w - \frac{p}{1+p(y+h_1)} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

其中,  $\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  为二维 Laplace 算子.

假定功能梯度板条的上下边界自由,而在裂纹面上作用反平面应力载荷  $\sigma_{zy} = \sigma(x)$ , 相应地有如下边界条件:

$$\begin{aligned} \sigma_{zy} &= 0 & (y=2h-h_1, y=-h_1) \\ \sigma_{zy}(x, 0) &= \sigma(x) & (|x| < a) \\ w(x, 0^+) &= w(x, 0^-) & (|x| > a) \\ \sigma_{zy}(x, 0^+) &= \sigma_{zy}(x, 0^-) & (|x| > a) \end{aligned}$$

## 2 求解过程

采用 Fourier 变换方法,可以得到方程式(2)在变换域内的通解为

$$\tilde{w} = A_1 I_1(\xi) \xi + A_2 K_1(\xi) \xi \tag{3}$$

其中,  $\xi = |s| [1 + p(y+h_1)]/p$ ;  $I_0$  和  $K_0$ 、 $I_2$  和  $K_2$  分别为零阶和二阶修正 Bessel 函数;  $A_1$  和  $A_2$  为待定系数.

变换域内位移和应力可以用矩阵表示

$$S = [\tilde{w} \quad \tilde{\sigma}_{zy}]^T = T \cdot A \tag{4}$$

式中,  $A = [a_1, a_2]^T$ .

根据上式可以得到变换域内  $-h_1 < y < 0$  和  $0 < y < 2h-h_1$  两个板条的位移和应力,即

$$S_1 = T \cdot A_1 \quad (-h_1 < y < 0) \tag{5a}$$

$$S_2 = T \cdot A_2 \quad (0 < y < 2h-h_1) \tag{5b}$$

下标 1 和 2 分别表示板条 1 ( $-h_1 < y < 0$ ) 和 2 ( $0 < y < 2h-h_1$ ). 根据式(5),边界条件可以写为

$$D_1 \cdot T(-h_1) \cdot A_1 = 0 \tag{6a}$$

$$D_1 \cdot T(2h-h_1) \cdot A_2 = 0 \tag{6b}$$

式中:  $D_1 = [0, 1]$ .

在变换域内可以得到:

$$S_1 - S_2 = \Delta S \tag{7}$$

其中:  $\Delta S = [\Delta \tilde{w}, 0]^T$ ,  $\Delta \tilde{w}$  为位移分量在裂纹面上的间断.

利用式(3)和式(7)可以得到待定常数  $A$  关于  $\Delta S$  的表达式为

$$A_1 = E_1 \cdot \Delta S \tag{8}$$

其中,  $\overline{W}_1 = \{Q_1 \quad Q_2\}^T$ ,  $E_1 = -\overline{W}_1^{-1} \cdot D_2^T \cdot D_1 \cdot T(2h-h_1) \cdot T(0)^{-1}$ ,  $D_2 = [1 \quad 0]$ ,  $Q_1 = D_1 \cdot T(-h_1)$ ,  $Q_2 = D_1 \cdot T(2h-h_1)$ .

将式(8)代入式(4)即可以得到变换域内的应力和位移关于  $\{\Delta S\}$  的表达式,同时根据裂纹面边界条件式(4)可以得到

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\omega} \tilde{w} \exp(isx) ds = \sigma(x) \quad |x| \leq a \tag{9}$$

其中,  $\tilde{\omega} = D_1 \cdot T(0) \cdot E_1 \cdot D_2^T$ .

考虑位移的单值性有

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta \tilde{w} \exp(isx) ds = 0 \quad |x| > a \tag{10}$$

因此,式(9)和(10)即为该混合边值问题的对偶积分方程.引入裂纹位错密度函数

$$\eta(x) = \frac{\partial}{\partial x} (\Delta w) \quad |x| \leq a$$

同时根据 Fourier 变换的性质,式(9)和(10)化为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} s^{-1} \tilde{\omega} \int_{-a}^a \eta(\alpha) \exp[is(x-\alpha)] d\alpha d\alpha &= \sigma(x) \\ \int_{-a}^a \eta(\alpha) d\alpha &= 0 \end{aligned}$$

根据 Bessel 函数的渐近性质,容易证明

$$\lim_{s \rightarrow \infty} s^{-1} \tilde{\omega}(s, 0) = -\beta$$

其中,  $\beta = \mu(0)/2$ .

利用解析函数的性质可以将式(9)化为一个 Cauchy 奇异积分方程<sup>[5]</sup>,然后采用 Erdogan<sup>[6]</sup>所发展的方法数值求解,位错密度函数具有平方根奇异性,假设它的形式为

$$\eta(\alpha) = f(\alpha) / \sqrt{1 - (\alpha/a)^2} \tag{11}$$

利用 Gauss-Chebyshev 积分性质,将式(13)代入式(9)和(10)得到如下线性代数方程组

$$\begin{aligned} \frac{a}{M} \sum_{n=1}^M \left\{ \frac{f(\alpha_n)}{\alpha_n - x_r} + f(\alpha_n) Z(\alpha_n, x_r) \right\} &= \frac{1}{\beta} \sigma(x_r) \\ \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M f(\alpha_n) &= 0 \end{aligned}$$

其中,  $\alpha_n = a \cos \frac{\pi}{2M} (2n-1)$ ;  $x_r = a \cos \frac{\pi r}{M}$  ( $r=1, 2, \dots, M-1$ );而  $M$  为离散点数目.求解该方程组可以得到  $f(\alpha_n)$  的值,通过插值可求得  $f(\alpha)$  在任意点的值.

根据反平面裂纹应力强度因子的定义<sup>[6]</sup>和 Chebyshev 多项式的性质,再由式(9)可以得到应力强度因子

$$K_{III}^{\pm} = \beta \sqrt{a} f(\pm a) \tag{12}$$

## 3 结果与讨论

作为一个算例,假设材料参数为

$$\mu_1 = 2.88 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}, \nu = 0.3.$$

我们计算了在  $\sigma(x) = \sigma_0$  ( $\sigma_0$  为常数)情况下的应力强度因子.

图 2 给出了相对裂纹长度  $a/h$  分别为 1, 3, 5 时,功能梯度材料无量纲梯度参数  $ph$  对应应力强

度因子的影响. 由图中可知, 无量纲应力强度因子  $K_{III}/(\sigma_0 a^{1/2})$  随着  $a/h$  的增加而增加, 随着材料梯度参数  $ph$  的增加而减小. 同时从图中还可以观察到, 随着  $a/h$  的增大, 材料梯度参数  $ph$  对应力强度因子的影响也是增大的.

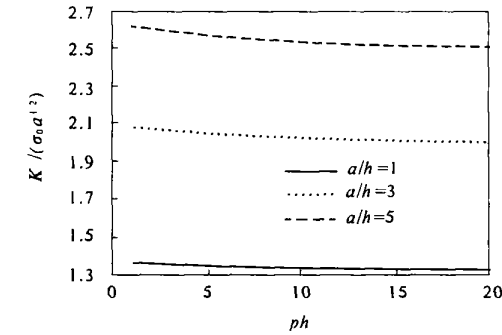


图 2 梯度参数  $ph$  对无量纲应力强度因子的影响  
Fig.2 The influence of gradient parameter  $ph$  on the normalized stress intensity factor

4 结论

假设功能梯度材料的剪切模量的倒数为坐标的线性函数, 采用积分变换方法, 通过求解奇异积分方程获得功能梯度板条Ⅲ型裂纹应力强度因子. 考察了裂纹尺寸以及材料的梯度参数对应力

强度因子影响. 计算结果表明: 适当增加功能梯度板条的厚度, 或控制裂纹的尺寸有利于提高材料的抗断裂能力. 同时在材料设计中, 合理选择功能梯度材料的梯度参数能够降低应力强度因子, 从而提高结构的抗断裂性能.

参考文献:

[1] EISCHEN J W. Fracture of nonhomogeneous material[J]. Int J Fracture, 1987, (34): 3~22.  
[2] HU K Q, ZHONG Z, JIN B. Anti-plane shear crack in a functionally graded piezoelectric layer bonded to dissimilar half spaces[J]. Int J Mech Sci, 2005, (47): 82~88.  
[3] JIN B, ZHONG Z. A moving mode-Ⅲ crack in functionally graded piezoelectric material: permeable problem[J]. Mech Res Comm, 2002, (29): 217~224.  
[4] LI C, WENG G J. Antiplane crack problem in functionally graded piezoelectric materials[J]. ASME J App Mech, 2002, 69: 1~8.  
[5] 许琪楼, 许雷. 三边支承一边自由矩形板自由振动分析[J]. 郑州大学学报(工学版), 2003, 24(1): 36~38.  
[6] ERDOGAN F. Complex Function Technique——Continuum Physics (XII) [M]. New York: Academic Press, 1975. 98~114.

A Mode Ⅲ Crack in A Functionally Graded Strip

CHENG Zhan—qi, LU Ji—fu

(School of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450001, China)

**Abstract:** The material properties of functionally graded materials are usually assumed to follow exponential or power distribution in existing literature. In this paper, the problem of a mode Ⅲ crack in a functionally graded strip is studied with the assumption that the reciprocals of the shear modulus is a linear function in the thickness direction, while the Possion's ratio is kept constant. By using the Fourier integral transform technique and the transfer matrix method, the mixed boundary problem is reduced to a set of singular integral equations. The mode Ⅲ stress intensity factor is obtained by numerically solving the singular integral equations. And the influence of the size of the structure and the graded parameter on the stress intensity factor is discussed.

**Key words:** functionally graded material; crack; stress intensity factor; strip