

# 误差椭球的性质及其在置信域问题中的应用

郭同德<sup>1</sup>, 贾军国<sup>2,3</sup>

(1. 郑州大学环境与水利学院, 河南 郑州 450002; 2. 西安交通大学理学院, 陕西 西安 710000; 3. 郑州大学数学系, 河南 郑州 450052)

**摘要:** 研究了空间点定位误差的误差椭球的性质和空间点误差的表示. 以概率论和多元分析为工具, 证明空间点误差落入椭球内的概率可以由标准正态分布的分布函数和密度函数表示; 证明了空间点误差可以沿误差椭球主轴方向分解为3个独立的分量, 并给出了分解方法和算例; 证明点误差落在误差椭球一侧内的概率为常数, 该常数与切点坐标无关且可以由标准正态分布函数表示; 讨论了点误差的可视化表达问题, 为空间点建立了椭球形及长方体形置信域, 并给出了置信水平的计算公式.

**关键词:** 误差椭球; 置信域; 概率分布; 多元分析

**中图分类号:** P 207

**文献标识码:** A

## 0 引言

在平面点的测量问题中, 人们对误差椭圆作了深入的研究, 它是平面点误差分布的概率密度等值线; 误差椭圆的长、短半轴的方向分别代表了平面点的最大和最小误差方向, 其大小又分别表示了平面点误差沿半轴方向的标准差; 相比之下, 人们对三维空间点误差的类似研究还比较少, 本文在点位误差服从三维正态分布的基础上, 研究了误差椭球的基本性质, 给出了涉及空间点误差的三个概率计算公式.

为几何要素建立置信域是描述误差的一个有效方法<sup>[1-5]</sup>. 置信域问题研究的难点在于计算或估计所建区域覆盖几何要素真实值的概率. 本文在对误差椭球研究的基础上, 为空间点建立了椭球形以及立方体形的置信域, 通过标准正态分布的分布函数和密度函数, 很容易计算出两种置信域的置信水平.

## 1 误差椭球的定义及性质

**定义:** 设空间点误差  $X = (X_1, X_2, X_3)^T$  服从3维正态分布  $N(\mu, B)$ , 其中  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T$ , 协方差矩阵  $B$  为3阶正定矩阵,  $T$  表示转置. 记  $D_1 = \{x | (x - \mu)^T B^{-1} (x - \mu) \leq R^2\}$  为误差椭球(见图1).

误差椭球就是一空间椭球形区域, 区域边界为椭球面. 面内的概率密度总大于面外的密度.

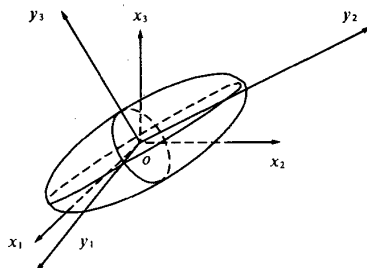


图1 误差椭球区域与误差方向

Fig.1 Error ellipsoid and error direction

关于误差椭球有如下结论.

**结论 1:** 空间点误差落入误差椭球内的概率

$$P(X \in D_1) = 2F_{01}(R) - 1 - 2R\phi(R) \quad (1)$$

其中,  $F_{01}(R)$ ,  $\phi(R)$  分别为标准正态变量的分布函数和密度函数.

**证明:** 不妨假定  $\mu = (0, 0, 0)^T$ , 由协方差矩阵  $B$  的正定性知,  $B$  的特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  均为正, 且可找到正交矩阵  $Q = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3)$  使得

$$Q^T B Q = \Gamma = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

其中,  $\vec{p}_i$  为  $B$  的属于  $\lambda_i$  的单位特征向量.

作变换:  $x = (x_1, x_2, x_3)^T = Q(y_1, y_2, y_3)^T = Qy$ ,

则  $|J_1| = \left| \frac{\partial x}{\partial y} \right| = |Q| = 1$ , 此时误差椭球  $D_1$  化为

$$x^T B^{-1} x = y^T Q^T B^{-1} Q y = y^T (Q^T B Q)^{-1} y^T \leq R^2,$$

$$\text{即} \quad \frac{y_1^2}{\lambda_1} + \frac{y_2^2}{\lambda_2} + \frac{y_3^2}{\lambda_3} \leq R^2.$$

所以,  $P(X \in D_1)$

$$\begin{aligned} &= \iiint_{D_1} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} |B|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2} x^T B^{-1} x\right] dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \iiint_{D_1} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} |\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left[\frac{y_1^2}{\lambda_1} + \frac{y_2^2}{\lambda_2} + \frac{y_3^2}{\lambda_3}\right]\right] \\ &\quad |J_1| dy_1 dy_2 dy_3 \end{aligned}$$

$$\text{作变换:} \begin{cases} y_1 = \sqrt{\lambda_1} R r \sin\varphi \cos\theta \\ y_2 = \sqrt{\lambda_2} R r \sin\varphi \sin\theta, \text{ 则 } |J_2| = \\ y_3 = \sqrt{\lambda_3} R r \cos\varphi \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(r, \varphi, \theta)} \right| = \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} R^3 r^2 \sin\varphi^{[6]}$$

所以:

$$\begin{aligned} P(X \in D_1) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_0^1 \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}} \\ &\quad \cdot \exp\left[-\frac{(rR)^2}{2}\right] \sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} R^3 r^2 \sin\varphi dr \\ &= \int_0^1 \frac{2}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{(Rr)^2}{2}\right] R^3 r^2 dr \\ &= 2F_{01}(R) - 1 - 2R\phi(R) \quad \text{证毕.} \end{aligned}$$

由定理1的证明过程可以看出, 若将空间点误差  $X$  用  $Y$  表示, 则  $Y_1, Y_2, Y_3$  相互独立(见图1), 而  $\lambda_i$  分别为3个误差分量的方差.

文献[6]曾用三维  $\chi^2(3)$  分布计算了上述概率, 这里用正态分布计算的结果与文献[6]中的结果是一致的.

**性质2:** 过误差椭球的6个顶点分别作切平面,  $D_2$  为切平面所围成的长方体(见图2), 则:

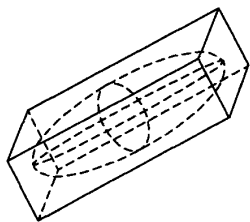


图2 过误差椭球顶点的长方体区域

Fig.2 Cube passing by vertexes of ellipsoid

$$P\{(X_1, X_2, X_3) \in D_2\} = (1 - F_{01}(R))^3 \quad (2)$$

**证明:** 设  $X$  为任意一点, 易见椭球的顶点分别为:  $P_1(\sqrt{\lambda_1} R \vec{p}_1), P_2(-\sqrt{\lambda_1} R \vec{p}_1), P_3(\sqrt{\lambda_2} R \vec{p}_2), P_4(-\sqrt{\lambda_2} R \vec{p}_2), P_5(\sqrt{\lambda_3} R \vec{p}_3), P_6(-\sqrt{\lambda_3} R \vec{p}_3)$ ,  $X$  落入  $D_2$  内的充分必要条件为  $(X - P_i)$  与顶点  $P_i$  的外法线成钝角, 即  $(X \pm P_i) \cdot (\pm \vec{p}_i) \leq 0$ , 或  $|X^T \vec{p}_i| \leq \sqrt{\lambda_i} R$ , 即  $|Y_i| \leq \sqrt{\lambda_i} R$ , 其中  $i = 1, 2, 3$ .

所以,  $P\{(X_1, X_2, X_3) \in D_2\} = P(|Y_1| \leq \sqrt{\lambda_1} R, |Y_2| \leq \sqrt{\lambda_2} R, |Y_3| \leq \sqrt{\lambda_3} R) = (1 - 2F_{01}(R))^3$  证毕.

**性质3:** 设  $P_0(x_0) = (x_{10}, x_{20}, x_{30})^T$  为误差椭球面上任意一点, 过  $P_0$  作切平面  $\pi$ , 该切平面将空间分为两部分, 椭球所在的部分记为  $D_3$ , 则误差点  $X$  落在  $D_3$  内的概率与切点的坐标无关, 其值为  $P\{X \in D_3\} = F_{01}(R)$  (3)

**证明:** 由  $x^T B^{-1} x = R^2$  知, 在  $P_0$  点切平面的法向量为:  $\vec{n} = 2B^{-1} x_0$ ,  $P$  点落在  $D_3$  内的充分必要条件为矢量  $\overrightarrow{P_0 P}$  与  $\vec{n}$  的夹角为钝角, 即  $(X - x_0)^T B^{-1} x_0 \leq 0$  或  $x_0^T B^{-1} X \leq R^2$

由于  $X$  服从正态分布  $(0, B)$ , 根据多元分布的性质<sup>[7]</sup> 知,  $x_0^T B^{-1} X$  服从正态分布:

$N((x_0^T B^{-1})0, (x_0^T B^{-1})B(x_0^T B^{-1})^T)$ , 即  $N(0, R^2)$ . 从而:  $P\{X \in D_3\} = P\{x_0^T B^{-1} X \leq R^2\} = F_{01}(R)$

## 2 空间点置信域的建立

**性质4** 设测量值  $X = (X_1, X_2, X_3)$  服从3维正态分布  $N(\mu B)$ , 其中  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^T$  为真实值, 以测量值  $X$  为中心, 构造椭球体  $E_1 = \{x | (x - X)^T B^{-1}(x - X) \leq R^2\}$ , 则  $E_1$  覆盖真值  $\mu$  的概率为:

$$P(\mu \in E_1) = 2F_{01}(R) - 1 - 2R\phi(R) \quad (3)$$

**证明:**  $P(\mu \in E_1) = P\{(\mu - X)^T B^{-1}(\mu - X) \leq R^2\} = P\{X - \mu)^T B^{-1}(X - \mu) \leq R^2\}$

由  $X$  正态分布  $N(\mu, B)$  知,  $X - \mu$  服从  $N(0, B)$ , 由(1)知  $P(\mu \in E_1) = 2F_{01}(R) - 1 - 2R\phi(R)$

类似地有:

**性质5:** 以  $X$  为中心, 构造图2所示的长方体:

$$\begin{aligned} E_2 = \{x | & |(x - X)^T \vec{p}_1| \leq \sqrt{\lambda_1} R, \\ & |(x - X)^T \vec{p}_2| \leq \sqrt{\lambda_2} R, |(x - X)^T \vec{p}_3| \leq \sqrt{\lambda_3} R\}, \end{aligned}$$

$$\text{则} \quad P(\mu \in E_2) = (1 - 2F_{01}(R))^3 \quad (5)$$

## 3 算例

设测量值  $(X_1, X_2, X_3)$  服从  $N(\mu, B)$ , 其中  $B$

$$= \begin{bmatrix} 1.2 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 1.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 1.5 \end{bmatrix}, \text{ 测量值为 } (11.0, 25.0, 9.0)$$

分别求出真值  $\mu$  的置信水平为0.9的椭球形及长方体形置信域.

### 3.1 椭球形置信域.

$$f(\lambda) = |\lambda E - B| = \lambda^3 - 4.000\lambda^2 + 5.100\lambda + 2.0970$$

其根为:  $\lambda_1 = 0.9760, \lambda_2 = 1.1412, \lambda_3 = 1.8829$  对应于  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  的特征单位向量依次为  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$  所以正交矩阵为

$$Q = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3) = \begin{bmatrix} -0.2561 & 0.9177 & 0.3065 \\ -0.7188 & -0.3918 & 0.5738 \\ 0.6463 & -0.0737 & 0.7595 \end{bmatrix}$$

由(1)式经试算知,当  $R = 2.500$  时  $2F(R) - 1 - 2R\phi(R) = 0.90$ , 从而,  $\mu$  的置信水平为 0.9 的椭球形置信域为

$$E_1 = \{x | x - X_0)^T B^{-1}(x - X_0) \leq 2.5^2\}.$$

其中,  $X_0 = (11.0, 25.0, 9.0)^T$  为测量值.

上述椭球体的短半轴、中半轴以及长半轴的方向余弦依次为  $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ , 其为长度  $\sqrt{\lambda_i}R$  依次为 2.47, 2.67, 3.43, 椭球的体积为  $V_1 = 94.75$

### 3.2 长方体形置信域

由式(2)知,当  $R = 2.115$  时,  $(2F(R) - 1)^3 = 0.90$ , 此时,长方体的三条棱长  $2\sqrt{\lambda_i}R$  分别为: 4.18, 4.52, 5.80, 其体积为:  $V_2 = 109.58$ .

上述两种置信域的水平均为 0.9, 比较者的体积可以看出,椭球形置信域的效率较高一些.

## 4 结束语

1)以 3 维空间点的误差的概率密度函数定义

了椭球.研究了误差椭球的性质,给出了涉及误差椭球的有关概率计算公式.

2)正态分布的分布函数为超越函数,无法用通常的积分法求得有关概率,笔者提出的正交性分解方法能在一定范围内解决这类问题.

3)通过文中证明的误差椭球的性质,可准确地计算出置信域的水平,与通常的不等式放大方法相比,该方法精度高且简单易行.

## 参考文献:

- [1] 武汉大学测绘学院测量平差学科组. 误差理论与测量平差基础[M]. 武汉:武汉大学出版社,2003.
- [2] 李德仁,彭美云,张菊清. GIS 中线要素的定位不确定性模型研究[J]. 武汉测绘科技大学学报,1995,20(4): 283~288.
- [3] 史文中. 空间数据误差处理的理论与方法[M]. 北京:科学出版社,1998: 88~99.
- [4] 郭同德,王家耀,魏海平. GIS 中基本几何素的置信区域问题研究[J]. 测绘学报,2003,32(2): 164~167.
- [5] 郭同德,杜云海,卢艳. GIS 中道路曲线的整体误差模型与试验研究[J]. 郑州大学学报(工学版),2004,25(2): 94~96.
- [6] 周江文. 误差理论[M]. 北京:测绘出版社,1979.
- [7] 张尧庭,方开泰. 多元统计分析引论[M]. 北京:科学出版社,1982:65~72.

## The Properties of Error Ellipsoid and Its Applications in Confidence Regions of Points

GUO Tong-de<sup>1</sup>, JIA Jun-guo<sup>2,3</sup>

(1. School of Environmental & Hydraulic Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China; 2. School of Science, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710000, China; 3. Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 4500052, China)

**Abstract:** The positional errors of points is assumed to be distributed with 3 dimensions normal distributions, on the basis of which, the error ellipsoid is defined as the isoplethic surface of the probability density function. By employing the theory of the quadratic form and multivariate analysis, three properties concerning error ellipsoid are proved: (1) The errors of points can be expressed in independent variables; (2) The error drops into error ellipsoid with a constant probability, and this probability can be determined by probability density function and distribution functions of the standard normal distribution. (3) The error drops into one side of the plane tangent to error ellipsoid with a constant probability, and this probability is independent of the coordinates of the tangent point. The properties mentioned above can be used to construct the confidence regions, which is a convenient way to express the uncertainty of points. Numerical example shows the process of establishing confidence regions which satisfies the given confidence level.

**Key words:** error ellipsoid; confidence region; probability distribution; multivariate analysis