

文章编号:1671-6833(2006)02-0088-03

低重量种子序列对 Turbo 码低码重分布的影响

张卫党¹, 阎新芳¹, 邵霞²

(1. 郑州大学信息工程学院, 河南 郑州 450052, 2. 中国网通有限公司郑州分公司, 河南 郑州 450052)

摘要:用概率的方法, 分析了不同重量的种子序列经过交织后仍为种子序列的概率, 讨论了低重量的种子自结尾输入序列对 Turbo 码的低码重分布的影响. 通过分析讨论指出, 如果 Turbo 码生成多项式中的反馈多项式的周期较长, 重 2 输入序列产生的码字重量就会较大, 而其他重量的种子输入序列, 尤其是重量为 3, 4 的种子输入序列, 产生的码字重量就很有可能低于重 2 输入序列产生的码字重量. 交织器的长度越短, 出现这种情况的概率就越大.

关键词: Turbo 码; 码重分布; 交织器

中图分类号: TN 918.1 **文献标识码:** A

0 引言

低码重分布对于 Turbo 码^[1]的误码特性有着重要的影响. 分析各种输入序列对低码重分布的影响一直是 Turbo 码中的研究热点. 文献[2, 3]对重 2 输入序列对 Turbo 码的低码重分布的影响进行了深入地分析讨论. 指出当交织长度很长时, 重 2 输入序列对 Turbo 码的最小码重起着决定性的影响. 在这一结论的影响下, 重 2 自结尾序列成为很多研究者的研究对象, 如文献[4, 5]等. 但这一结论是在交织长度很长(无限长)时得到的. 当交织长度不是很长, 例如短帧时, 重 2 输入序列对低码重分布的影响将逐渐减小, 而其他低重量的输入序列对低码重的影响作用将逐渐增加. 笔者对此情况作了深入地分析: 首先证明了一个有关自结尾序列的分解定理; 在此基础上讨论了在均匀交织的情况下低重量种子自结尾输入序列对 Turbo 码低码重分布的影响, 并给出了概率曲线.

1 自结尾序列的分解定理

定理(自结尾序列的分解定理) 在 RSC 编码器中, 任一自结尾序列都可以表示为一个长度不超过反馈多项式周期的较短自结尾序列与一个重 2 组合自结尾序列的组合.

证明: 由文献[4]知, 存在一个多项式 $h'(D)$ 使得 $h'(D)h(D) = D^e - 1$. 又知一个自结尾序列

可以表示为

$$a(D) = q(D)h(D) \\ = (q_0 + q_1D + \cdots + q_{r-1}D^{r-1})h(D).$$

用 $h'(D)$ 去除 $q(D)$, 得

$$q(D) = q'(D)h'(D) + r(D) \quad (1)$$

这里 $q'(D)$ 是商式, $r(D)$ 是余式, 且 $\text{degree}(r(D)) < \text{degree}(h'(D)) = e - \text{degree}(h(D))$. 然后用 $h(D)$ 乘式(1)两端, 则自结尾序列可以由下式表示:

$$a(D) = q'(D)h'(D)h(D) + r(D)h(D) \\ = q'(D)(D^e - 1) + r(D)h(D) \quad (2)$$

式中: 右端的第一项是长度为 $e + 1$ 的最短重 2 自结尾序列的叠加; 第二项是长度不超过 e 的自结尾序列. 在第一项中, 如果有两个最短重 2 自结尾序列的下标各有一个相重, 这两个最短重 2 自结尾序列就会变成一个长度较长的重 2 自结尾序列. 因此, 第一项就是重 2 自结尾序列的组合. 故定理得证.

2 基本自结尾序列与种子序列

我们称由 $r(D)h(D)$ 生成的自结尾序列为基本自结尾序列. 而第一个非零元素“1”处在序列首位置的基本序列为种子序列.

设 $h = (10\ 011)$, 它的周期 $e = 15$. 表 1 给出了重量不超过 10 的所有基本序列数和种子序列数.

表1 重量 ≤ 10 的所有基本序列和种子序列Tab.1 The all basic frequencies and seed frequencies with weight ≤ 10

自结尾序列重量	种子自结尾序列	基本自结尾序列
2	0	0
3	7	35
4	28	105
5	56	168
6	112	280
7	203	435
8	232	435
9	168	280
10	112	168

表1中第一行是自结尾序列的重量,从2到10.第二行是种子自结尾序列的数目.第三行是基本自结尾序列的数目.表1中没有重2自结尾序列.重量为3的种子序列有7个,输入图案(输入序列中非零元素的位置)分别为(0,1,12), (0,2,9), (0,3,4), (0,5,10), (0,6,8), (0,7,13), (0,11,14).重量为3的基本序列有35个,包括7个种子序列.重量为4的种子序列有28个,基本序列有105个,等等.所有的给定重量的基本序列都可由同重的种子序列移位而得.

3 低码重自结尾序列对低码重分布的影响

为简单起见,我们只考虑那些长度最短的重3自结尾序列,即不带周期扩展的自结尾序列.首先考虑只有一个长度为 l_1 的重3种子自结尾序列,反馈多项式的周期为 p ,交织长度为 N ,约束长度是 $m+1$.这样一个重3自结尾序列,经均匀交织映射后仍为同样的自结尾序列的概率为 P_3

$$= \frac{6}{N(N-1)(N-2)},$$

考虑到移位特性,这个概率应修正为

$$P_3 = \frac{6(N+m-l_1+1)^2}{N(N-1)(N-2)} \quad (3)$$

同样,对于一个最短重2自结尾序列,经均匀交织映射后仍为同样的自结尾序列的概率为

$$\frac{2}{N(N-1)},$$

考虑到移位特性,这个概率应修正为

$$P_2 = \frac{2(N+m-p+1)^2}{N(N-1)} \quad (4)$$

现在考虑重3种子自结尾序列有 n 个的情况.它们的长度一般情况下是不相同的,但简单起见,假设它们的平均长度为 \bar{l} .这时,式(3)变为

$$P_3' = \frac{6(N+m-\bar{l}+1)^2 n^2}{N(N-1)(N-2)} \quad (5)$$

万方数据

设 $N \gg m$,式(5)与式(4)之比可近似为

$$\frac{P_3'}{P_2} \approx \frac{3(N-\bar{l})^2 n^2}{(N-2)(N-p)^2} \quad (6)$$

当 $N \gg p$ 时,由于 \bar{l}, n 均与 N 无关,式(6)可近似为

$$\frac{P_3'}{P_2} \approx \frac{3n^2}{N} \quad (7)$$

由于 n 是重3种子序列的数目,可以认为与 p 成正比.因此,式(7)的值与反馈多项式周期的平方成正比,与交织长度成反比.由此可见,反馈多项式的周期与重3自结尾序列出现的概率有很大关系.当式(6)的值大于1时,表明经过交织,重3自结尾序列出现的概率大于重2自结尾序列出现的概率.表2给出了两种周期情况下式(6)的取值.

表2 两种生成多项式情况下式(6)的取值

Tab.2 The values of fomular (6) with two different generating matrix

生成矩阵	周期 p	种子数	平均长度	比值 =1	比值 =1/3	比值 =1/10
(1,10 001/10 011)	15	7	10	150	450	1 480
(1,100 001/100 101)	31	15	20	690	2 020	6 740

表2的最后三列是概率比值式(6)分别取值为1,1/3和1/10时与两个生成矩阵对应的交织器的长度.从表中可以看出,当交织长度分别为150,690时,种子重3自结尾序列与最短重2自结尾序列出现的概率相等.随着交织长度的增加,概率比值逐渐变小.

依照同样的方法,可以求出种子重4自结尾序列出现的概率为

$$P_4 = \frac{24(N+m-\bar{l}_4+1)^2 n_4^2}{N(N-1)(N-2)(N-3)} \quad (8)$$

式中: \bar{l}_4 和 n_4 分别为种子重4自结尾序列的平均长度和数量.式(8)和式(4)的比值近似为

$$\frac{P_4}{P_2} \approx \frac{12(N-\bar{l}_4)^2 n_4^2}{(N-2)(N-3)(N-p)^2} \quad (9)$$

其渐进特性为 $\frac{12n_4^2}{N^2}$.

显然,其值与交织长度的平方成反比.其下降速度要远快于式(7).表3给出了两种周期情况下式(9)的取值.

从表3中可以看出,当交织长度分别为100,490时,种子重4自结尾序列与最短重2自结尾序列出现的概率相等.随着交织长度的增加,概率比值迅速变小.

表 3 两种生成多项式情况下式(9)的取值

Tab.3 The values of fomular (9) with two different generating matrix

生成矩阵	周期 p	种子数	平均长度	比值 = 1	比值 = 1/3	比值 = 1/10
(1,10 001/10 011)	15	28	10	100	170	310
(1,100 001/100 101)	31	140	20	490	850	1 540

图 1 给出了周期为 31 时,式(6)和式(9)的值随交织长度 N 连续变化的情况. c_1 , c_2 分别是式(6)和式(9)的值, c_3 是恒 1 参考线. 从图中可以看出, 交织长度在 350 ~ 700 范围内时, 重 3 自结尾序列出现的概率最大. 当交织长度小于 350 后, 重 4 自结尾序列出现的概率更大.

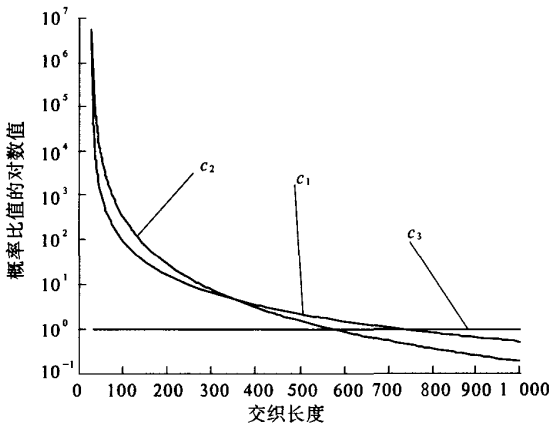


图 1 周期为 31 时,式(6)和式(9)的值随交织长度 N 连续变化的情况

Fig.1 The curves of the values of famular (6) and (9) with length of interleavers N and period of 31

4 结论

本文分析讨论了低重量种子自结尾序列对 Turbo 码低码重分布的影响. 由以上分析可知, 当交织长度较长而反馈多项式的周期较短时, 输入序列的重量越轻, 对低码重分布的影响越大; 而当交织长度逐渐变短而反馈多项式的周期逐渐变长时, 重 2 自结尾序列对低码重分布的影响将逐渐变小, 而在某一交织长度范围内, 重 3 或重 4 自结尾序列出现的概率可能最大. 因此, 在短帧 Turbo 码的设计中必须考虑到这一点.

参考文献:

- [1] BERROU C, GLAVIEUX A, THITIMAJSHIMA P. Near Shannon limit error - correcting and decoding: Turbo - codes[A]. IEEE International Conference on Communications (ICC)[C]. 1993. 1064 ~ 1070.
- [2] BENEDETTO S, MONTORSI G. Unveiling turbo codes: some results on parallel concatenated coding schemes[J]. IEEE Trans Inform Theory, 1996, 42(2): 409 ~ 428.
- [3] LANCE C, PEREZ, S, DANIEL J. A distance spectrum interpretation of turbo codes[J]. IEEE Trans Inform Theory, 1996, 42(6): 1698 ~ 1709.
- [4] ZHANG W D, YUAN C, WANG X M. The low weight distributions of turbo codes[A]. Proceeding of the 8th International Conference on CIC, Seoul [C]. CIC Press, 2003. 390 ~ 392.
- [5] 张卫党, 张德辉. Turbo 码中交织器的倍距变换特性[J]. 郑州大学学报(理学版), 2005, 37(1): 34 ~ 37.

Influence of Low-weight Seed Sequences on Low - Weight Distributions of Turbo Codes

ZHANG Wei - dang¹, YAN Xin - fang¹, SHAO Xia²

(1. School of Information Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450052, China; 2. Netcom Company Limited Zhengzhou Branch, Zhengzhou 450052, China)

Abstract: Using the probability method, the probabilities of a seed sequence is still a seed sequence after interleaving are calculated. The influence of the low - weight seed sequences on the low weight distributions of Turbo codes is discussed. The results show that the longer the period of the feedback polynomial of the generating matrix is, the heavier the weight of the codewords caused by the weight - 2 input sequences is, and therefore the weights of the codewords caused by other kinds of input sequences, such as weight - 3 or weight - 4 seed sequences, maybe exceed that by the weight - 2 input sequences. The shorter the period, the more probably this case happens.

Keywords: Turbo codes; weight distributions of Turbo codes; interleaver