文章编号:1671-6833(2006)02-0077-04

基于非线性原-对偶内点算法的电力系统无功优化

谢传治[1], 高喜珠[2], 闫永生[3], 陈根永[1]

(1.郑州大学电气工程学院,河南 郑州 450002; 2.三门峡水力发电厂,河南 三门峡 472000; 3.河南电力实验研究院,河南 郑州 450052)

摘 要:以电力系统中无功优化的非线性规划模型为基础,采用原对偶内点算法进行全局寻优.文中通过对障碍参数确定方式的研究,根据障碍参数的物理本质以及电力系统本身的特点,提出了在运用原对偶内点算法分析电力系统无功优化时,应根据不同物理意义的变量来确定相应障碍参数的方法.在此基础上,分析了障碍参数中加速因子对算法的影响,提出了加速因子的动态确定策略.在对IEEE 118节点系统进行的计算分析表明本文算法收敛性好、计算速度快.

关键词:无功优化;非线性规划;原-对偶内点算法;障碍参数;对偶间隙;加速因子

中图分类号:TM 744 **文献标识码**:A

0 引言

电力系统无功优化问题在数学上是一个多变量、高维数、多约束、离散和连续变量共存的非凸、非线性规划问题,传统算法如逐次线性规划法、逐次二次规划法、非线性规划法、牛顿法等,由于其在收敛速度及不等式约束上的处理而表现的不太理想.近来一些基于人工智能的新方法,如人工神经网络、专家系统、模拟退火和遗传算法等相继被引入到电力系统无功优化问题的研究中,但其在大节点系统的寻优中过长的计算时间,使得其难以应用于实际电力系统中.自从1984年,Karmarkar提出了求解线性规划的多项式时间复杂性算法——投影尺度法之后,内点法以其较少的计算时间、较强的求解大规模问题的能力以及易于处理不等式约束等特点立即引起了人们的关注[1].随着对内点法研究的日益深入,如引入同伦变量并根据同伦变量之间的关系来检测优化过程中可能出现的不可行问题[2];又如引入预测校正环节使得向心参数随着搜索过程不断改变以提高收敛速度[3]等等,总之内点算法正以其收敛迅速、鲁棒性强、对初值的选择不敏感等优点而被广泛使用.在内点法中如何确定障碍参数,一直是内点法的关键,它直接影响到算法的收敛性[4~5].本文以电力系统中无功优化的非线性规划模型为基础,采用原对偶内点算法进行全局寻优.文中通过对障碍参数确定方式的研究,提出了在电力系统无功优化中根据不同物理意义的变量来确定相应障碍参数的方法,并根据障碍参数对算法的影响,提出了障碍参数中加速因子的确定策略.在对算例进行的计算分析表明本文算法收敛性好、计算速度快.

1 原对偶内点算法

以系统有功损耗为目标函数的电力系统无功优化的非线性模型[6~8]为

$$\min f(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

$$\text{s.t. } \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=0 \tag{2}$$

$$\underline{\boldsymbol{g}}<\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})<\bar{\boldsymbol{g}} \tag{3}$$

式中:$\boldsymbol{x}$为由各节点电压相角、电压幅值、无功补偿装置出力、可调变压器变比、发电机无功出力等构成的状态变量和控制变量(n维);$f(\boldsymbol{x})$为系统的有功损耗;$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$为系统的潮流平衡方程式($m$维);$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$为由节点电压幅值、可调变压器的变比、无功补偿装置出力、发电机无功出力等所构成的不等式约束条件(r维).

引入松弛变量$\boldsymbol{l},\boldsymbol{u}$($\boldsymbol{l},\boldsymbol{u}\geqslant 0$)变不等式约束为等式约束,即将式(3)改为

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{g}}=0 \tag{4}$$

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{l}-\underline{\boldsymbol{g}}=0 \tag{5}$$

引入对数障碍函数,消去松弛变量的非负性约束,同时也将等式约束通过Lagrangian乘子引

收稿日期:2006-01-14;修订日期:2006-03-08

基金项目:河南省科技攻关项目(0424220182).

万方数据 谢传治(1978-),男,江苏扬州人,郑州大学硕士研究生,主要从事电力规划方面的研究.

入目标函数,形成 Lagrangian 函数:

$$F=f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{l}-\underline{\boldsymbol{g}}]+\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\cdot[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{g}}]-p\left(\sum_{i=1}^{r}\ln(l_i)+\sum_{i=1}^{r}\ln(u_i)\right) \quad (6)$$

$\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}$ 为拉格朗日乘子向量;p 为障碍参数,且 $p\geqslant0$;$\boldsymbol{l},\boldsymbol{u}$ 的非负性由对数函数保证.

由 Kuhn - Tucker 最优条件可得

$$F_x=\nabla f(\boldsymbol{x})+\nabla^{\mathrm{T}}h(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y}+\nabla^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{w})=0 \quad (7)$$

$$F_y=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=0 \quad (8)$$

$$F_z=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{l}-\underline{\boldsymbol{g}}=0 \quad (9)$$

$$F_w=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{g}}=0 \quad (10)$$

$$F_l=\boldsymbol{ZLe}+p\boldsymbol{e}=0 \quad (11)$$

$$F_u=\boldsymbol{WUe}+p\boldsymbol{e}=0 \quad (12)$$

$$(\boldsymbol{l},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}>0;\boldsymbol{z}<0)$$

式中:$\boldsymbol{L},\boldsymbol{U},\boldsymbol{Z},\boldsymbol{W}$ 分别为以向量 $\boldsymbol{l},\boldsymbol{u},\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}$ 各元素为对角元构成的对角矩阵;$\boldsymbol{e}=[1,1,1,1\cdots1]^{\mathrm{T}}$.

运用牛顿 - 拉夫逊法对式(7) ~ (12)进行求解,可以得到如下修正方程:

$$\Delta\boldsymbol{l}=\nabla^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}+F_z \quad (13)$$

$$\Delta\boldsymbol{u}=-\nabla^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}-F_w \quad (14)$$

$$\Delta\boldsymbol{z}=-\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}\nabla^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}-\boldsymbol{L}^{-1}(\boldsymbol{Z}F_z+F_l) \quad (15)$$

$$\Delta\boldsymbol{w}=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{W}\nabla^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\Delta\boldsymbol{x}+\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{W}F_w+F_u) \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}' & \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{J} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{x}\\ \Delta\boldsymbol{y}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}F'_x\\ F_y\end{bmatrix} \quad (17)$$

其中,

$$\boldsymbol{H}'=\nabla^2[f(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}})\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})]+\nabla\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{W}-\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{Z}]\nabla^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}),$$

$$\boldsymbol{F}'_x=\nabla f(\boldsymbol{x})+\nabla\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{y}+\nabla\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})[\boldsymbol{U}^{-1}(\boldsymbol{W}F_w+p\boldsymbol{e})-\boldsymbol{L}^{-1}(\boldsymbol{Z}F_z+p\boldsymbol{e})],$$

$$\boldsymbol{J}=\nabla^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}).$$

由修正方程式(17)求出修正量 $\Delta\boldsymbol{x},\Delta\boldsymbol{y}$ 再代入到式(13) ~ (16)可以得到所有原变量和对偶变量的修正量.

2 障碍参数的确定

原对偶内点算法的关键是障碍参数 p 的选择.在最优解处,障碍参数 p 应趋近于零,因而要确定一个适当的修正策略来逐步减小 p 的值,这是对算法收敛性影响最大的一个外在因素.障碍参数的修正,有多种方法,而“对偶间隙”的实用研究和经验较为成熟且效果较好,以下就对此方法加以说明.

对偶间隙,即 Dual Gap,用以表明原问题的目标函数和对偶问题的目标函数之间的间隔程度.

以一个线性规划问题为例,对原问题:

$$\begin{cases}\min\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\quad(\boldsymbol{x}\geqslant0)\end{cases}.$$

其对偶问题为

$$\begin{cases}\max\ \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leqslant\boldsymbol{c}\ (\boldsymbol{y}\geqslant0)\end{cases}.$$

由弱对偶性质知:$\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ 是 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ 的下界,即

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\geqslant0.$$

由强对偶性质知:若原问题和对偶问题达到最优时有

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=0.$$

而 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$ 被称为对偶间隙.

对于刚才的原问题,引入对数障碍函数后可得到其 Lagrangian 函数:

$$L=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{b})-p\sum\ln x_i \quad (18)$$

由其 Kuhn - Tucker 最优条件可解得:

$$\boldsymbol{Xz}=p\boldsymbol{e} \quad (19)$$

式中:$\boldsymbol{X}$ 是以 x_i 为对角元素的对角矩阵;$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{c}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$($\boldsymbol{z}$ 为原问题的松弛变量),$\boldsymbol{e}=[1,1,1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$ 假设最优解在 $\bar{p}$ 处得到,则

$\bar{p}=(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})/n$($n$ 为变量 x_i 的个数),由于上述原因通常以下式计算 p:

$$p=(\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y})/(\eta\beta)\quad(\beta>1) \quad (20)$$

即希望每次迭代取对偶间隙的 $\frac{1}{\beta}$ 值.(对于具有上下界约束的问题上述方法仍然适用,本文限于篇幅不再叙述)

由于各变量有着不同的物理上的含义、特性、量纲,它们在优化过程中所起的作用和各自的变化轨迹是不一样的,采用统一障碍参数的方法必然使得某些障碍参数的变化不能最优,对整个算法的性能也会产生很大的影响;对这些变量应首先进行分类处理,可以将各原变量和对偶变量按不同的物理含义进行分类,如母线电压、发电机组无功功率、变压器分接头等不同的变量分别用下式选取不同的障碍参数.(变量具有上下界约束):

$$p=\frac{\sum_{i=1}^{n'}(u_iw_i-l_iz_i)}{2n'\beta} \quad (21)$$

式中:n' 为某一类变量的总数.

引入到原对偶内点算法中,即将式(6)中的障碍函数项按照不同类别的不等式约束分为多项.如果按照各节点电压相角、电压幅值、无功补偿装置出力、可调变压器变比、发电机无功出力为不等式约束,则将式(6)中障碍参数项 $p(\sum_{i=1}^{r}\ln(l_i)+$

$\sum_{i=1}^{r}\ln(u_i)$变为：$\sum_{m=1}^{5}p_m(\sum_{i=1}^{r_m}\ln(l_i)+\sum_{i=1}^{r_m}\ln(u_i))$.（其中 $m=1,2,3,4,5$ 分别代表各节点电压相角、电压幅值、无功补偿装置出力、可调变压器变比、发电机无功出力）.确定各自的障碍参数时，应对各自障碍参数中的加速因子 β 的赋值采用一定的策略（β 一般可以取 5～100 之间），因为当 β 值较大时，算法收敛性能一般较好，但太大的 β 容易引起振荡使得算法的稳定性变差甚至使得算法不收敛，当 β 值较小时，算法的稳定性较好，但收敛速度变慢.所以选择适当的 β 值对算法的好坏至关重要.通过计算分析，本文作者在对 β 的赋值中采用如下策略，首先对 β 值赋予一个较小值 $\beta_{\min}$，然后根据下式进行调整：$\beta^{(1)}=\beta^{(0)}+\frac{\beta_{\max}+\beta_{\min}}{E}$（$\beta^{(1)}$为本次迭代加速因子取值，$\beta^{(0)}$为上一次迭代加速因子取值，$\beta_{\max}$为算法中加速因子最大取值可取 100，$\beta_{\min}$为算法中加速因子初值可取 5，$E$ 为一大于算法迭代总次数的常数），上式中 E 的值无法事先知道，可由经验近似决定（如对 IEEE33 节点系统可取 20，对 IEEE118 节点系统可取 30）.

3　计算步骤及算例分析

本文以各节点电压相角、电压幅值、无功补偿装置出力、可调变压器变比、发电机无功出力为不等式约束，分别计算其各自的障碍参数，且编程实现.其流程如下：

(1) 初始化：输入系统参数及不等式约束上、下限，原变量和对偶变量初始值，确保 $\boldsymbol{l},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}>0$；$\boldsymbol{z}<0$，给定合适的加速因子 β(一般可以取 10～100 之间)，给出收敛判据（潮流偏差小于 0.001 且所有对偶间隙小于 0.000 01）和最大迭代次数.

(2) 计算各自的对偶间隙及系统潮流，并判断是否满足收敛判据，若满足则输出最优解，结束计算，否则继续.

(3) 由式(17)计算 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 的修正量.

(4) 由式(13)～(16)计算 $\boldsymbol{l},\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}$ 的修正量.

(5) 为确保内点性质，原变量和对偶变量的修正按下式进行：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{l}\\ \boldsymbol{u}\end{bmatrix}^{(k-1)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{l}\\ \boldsymbol{u}\end{bmatrix}^{(k)}+T_{\mathrm{p}}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{x}\\ \Delta\boldsymbol{l}\\ \Delta\boldsymbol{u}\end{bmatrix}\tag{22}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\\ \boldsymbol{w}\end{bmatrix}^{(k+1)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}\\ \boldsymbol{z}\\ \boldsymbol{w}\end{bmatrix}^{(k)}+T_{\mathrm{d}}\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{y}\\ \Delta\boldsymbol{z}\\ \Delta\boldsymbol{w}\end{bmatrix}^{(k)}\tag{23}$$

其中，

$$T_{\mathrm{p}}=0.999\,5\min\{\min_{\Delta l_i<0}\frac{-l_i}{\Delta l_i},\min_{\Delta u_i<0}\frac{-u_i}{\Delta u_i},1\};$$

$$T_{\mathrm{d}}=0.999\,5\min\{\min_{\Delta z_i>0}\frac{-z_i}{\Delta z_i},\min_{\Delta w_i<0}\frac{-w_i}{\Delta w_i},1\}.$$

(6) 转步骤 2.

在对 IEEE 118[9] 节点系统的计算中，其各自对偶间隙的变化与常规内点算法对偶间隙变化的对比如下：

表 1　对偶间隙变化的比较

Tab.1　Comparison of dual gap

迭代次数	常规间隙	U 间隙	θ 间隙	C 间隙	G 间隙	T 间隙
3	1.243 467	1.005 687	0.989 451	1.454 797	1.257 521	1.381 259
5	0.304 782	0.272 456	0.270 542	0.310 547	0.295 472	0.318 245
18	0.000 011	0.000 007	0.000 007	0.000 009	0.000 008	0.000 009
21	0.000 009	0.000 006	0.000 006	0.000 008	0.000 007	0.000 008

说明：U 间隙为电压幅值对偶间隙；间隙为电压相角对偶间隙；C 间隙为无功补偿装置出力对偶间隙；G 间隙为发电机无功出力对偶间隙；T 间隙为可调变压器变比对偶间隙.

由计算结果可知在对 IEEE 118 节点系统的计算中，本文算法只要 18 次迭代就可收敛，而常规内点算法则需要 21 次.本文作者还将本文算法用于 IEEE14、IEEE30 节点系统，结果发现本文算法在小节点系统中优势并不明显，但随着网络节点数的增加，其在收敛速度和计算时间上的优势会逐渐凸显.由于实际电力网络节点众多，故每次迭代所需时间也会随着网络节点的增加而增加，而的优势也会愈加明显.

4　结论

通过对 IEEE 118 节点系统的计算分析，可看出在采用了根据不同物理意义的变量来确定相应障碍参数的方法，并采用本文给出的动态确定障碍参数中加速因子的策略后，算法的收敛性能得到了一定的提高.从而证明了本文提出的根据变量的不同物理含义、特性、量纲，在对障碍参数的计算上，对这些变量首先进行分类处理，再给出不

同的障碍参数以及动态确定障碍参数中加速因子的方法.

参考文献:

[1] 胡清淮.线性规划内点法[M].武汉:武汉化工学院,1997.

[2] 刘明波,李 健,吴 捷.求解无功优化的非线性同伦内点法[J].中国电机工程学报,2002, 22(1):1~7.

[3] 龚建荣.电力系统无功功率优化[D].杭州:浙江大学,2002.

[4] WEI H, SASAKI H, KUBOKAWA J, et al. An Interior point nonlinear programming for optimal power flow problems with a novel data structure[J]. IEEE Trans on Power Systems, 1998, 13(3):870~877.

[5] YAN X, QUINTANA V H. An efficient predictor - corrector interior point algorithm for security - constrained economic dispatch[J]. IEEE Trans On Power Systems, 1997, 12(2):803~810.

[6] 刘明波,王晓村.内点法在求解电力系统优化问题中的应用综述[J].电网技术,1999,23(8):61~64.

[7] 余 娟,颜 伟,徐国禹,等.基于预测-校正原对偶内点法的无功优化新模型[J].中国电机工程学报,2005, 25(11):146~151.

[8] 王克文,姜俊峰,刘宪林,等.灵敏度指标在10KV配电线路无功补偿中的应用[J].郑州大学学报(工学版),2002, 22(3): 70~74.

[9] 张伯明,陈寿孙.高等电力网络分析[M].北京:清华大学出版社,1994.

Primal - dual Interior Point Algorithm Based Non - linear Programming Model for Optimal Reactive Power

XIE Chuan - zhi[1], GAO Xi - zhu[2], YAN Yong - sheng[3], CHEN Gen - yong[1]

(1. School of Electrical Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China; 2. Sanmenxia Hydropower Plant, Sanmenxia 472000, China; 3. Henan Electric Power Research Institute, Zhengzhou 450052, China)

Abstract: The primal - dual interior point algorithm is applied in global optimization on the basis of non - linear programming model for optimal reactive power. The process of how to get barrier parameters which are decided by their physics meaning and the character of the power system is discussed in detail. This paper gives the method of how to get accelerating factor by the influence of barrier parameters to the algorithm. The results of tests in IEEE 118 nodes system have shown that the proposed method has good calculation speed.

Key words: reactive - power optimization; non - linear programming; primal - dual interior - point algorithm; barrier parameter; dual gap; accelerating factor