

文章编号:1671-6833(2006)02-0040-05

## 一次超静定梁的弹塑性全过程分析

李会知<sup>1</sup>, 刘敏珊<sup>2</sup>, 陈淮<sup>1</sup>

(1. 郑州大学土木工程学院, 河南 郑州 450002; 2. 郑州大学热能工程中心, 河南 郑州 450002)

**摘要:**通过虚功原理和单位荷载法分析了集中荷载作用下一次超静定梁的弹塑性加载及变形过程。受力变形可分为4个阶段:弹性阶段;固支端附近产生塑性变形阶段;固支端附近和集中荷载作用点附近均产生塑性变形阶段;固支端保持为塑性铰,集中荷载作用点附近塑性区扩展而固支端附近塑性区卸载阶段。给出了加载各阶段的弯矩、位移公式及外荷载与支反力的关系式,可供工程结构设计。

**关键词:**超静定梁;弹塑性;单位荷载法;塑性铰;集中荷载

**中图分类号:** TU 323.3

**文献标识码:** A

### 0 引言

梁是工程结构中最常见的构件,梁的受力和变形分析既是工程结构设计的基础,也是力学的基础理论问题。许多学者都曾对静定梁的受力和变形全过程进行了分析,Parathap 和 Varadan<sup>[1]</sup>分析了水平悬臂梁在自由端受竖向力作用的非线性弹性大挠度问题,Lo 和 Gupta<sup>[2]</sup>分析了水平悬臂梁在自由端受竖向力和简支梁受两个力作用的非线性弹性大挠度问题,伍小强和余同希<sup>[3]</sup>分析了水平悬臂梁在自由端受竖向力作用的理想弹塑性大挠度问题。但对于超静定梁的受力和变形全过程分析,多是利用数值方法来解决<sup>[4]</sup>,解析分析比较少,只有曹天捷<sup>[5]</sup>利用曲率两次积分法研究了一端固支、一端铰支的单跨一次超静定梁在中部受集中荷载作用下的弹塑性加载全过程,但该文在分段积分时产生过多的积分常数,而且没有显式给出这些常数,使得公式难以直接应用,另外,其得出的第二阶段零截面位置不变的结论是错误的。对于超静定梁的受力分析,所见教材<sup>[6-8]</sup>只是给出了弹性极限荷载和塑性极限荷载,而并未分析超静定梁在产生塑性变形后各阶段的变形特点及各阶段的荷载值。作者<sup>[9]</sup>针对塑性力学教材中存在的问题,讨论了集中荷载作用下一次超静定梁在弹塑性加载过程中支反力与荷载的关系,本文将研究推进一步,利用虚功原理和单位荷载法对图1所示的单跨超静定梁在集中荷载作用下的工况进行了弹塑性加载全过程的分析,给出了可

以直接利用的荷载和位移公式。

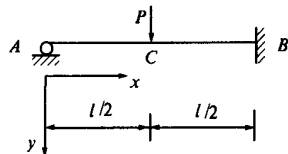


图1 一次超静定梁

Fig.1 Astatically - indeterminate beam

### 1 弹性阶段和塑性极限状态

图1所示超静定结构的弯矩分布通过点A的支反力 $R_A$ 表达为

$$M = \begin{cases} R_A x & (0 \leq x \leq \frac{l}{2}) \\ (R_A - P)x + \frac{Pl}{2} & (\frac{l}{2} < x \leq l) \end{cases} \quad (1)$$

在梁受力变形的各个阶段,支反力 $R_A$ 与荷载 $P$ 的关系不同,因此,弯矩分布也发生变化。确定了各阶段 $R_A$ 与 $P$ 的关系,也就可以进一步分析梁的受力分布和变形。

弹性阶段是梁受力变形的第一阶段,梁上各处均处于弹性状态, $R_A$ 与 $P$ 的关系为

$$R_A = \frac{5}{16}P \quad (2)$$

梁竖向位移(挠度曲线)为

$$\Delta = \begin{cases} \frac{P}{EI}(-\frac{5}{96}x^3 + \frac{1}{32}l^2x) & (0 \leq x \leq \frac{l}{2}) \\ \frac{P}{EI}(\frac{11}{96}x^3 - \frac{1}{4}lx^2 + \frac{5}{32}l^2x - \frac{1}{48}l^3) & (\frac{l}{2} < x \leq l) \end{cases} \quad (3)$$

可以看出,在本阶段,弯矩、支反力、竖向位移

收稿日期:2006-01-16;修订日期:2006-04-01

基金项目:河南省重点科技攻关资助项目(422020901)

作者简介:李会知(1965-),男,河南永城人,郑州大学教授,博士,主要从事力学教学和结构工程研究。

万方数据

均与荷载  $P$  是比例关系,但梁中产生塑性变形时,此比例关系不再存在。本阶段( $P \leq P_e$ )结束时,固支端处的弯矩值达到弹性极限弯矩  $M_e$ ,弹性极限荷载  $P_e = 16M_e/3l$ 。

塑性极限荷载  $P_u = 6M_u/l$ (其中  $M_u$  为梁截面塑性极限弯矩),极限状态时支反力为  $R_A = 1/3P_u$ 。

上述弹性阶段的结果和塑性极限荷载是已有结论,之所以仍在此列出是为了问题的完整性,也便于与产生弹塑性变形后的工况比较。

对于理想弹塑性材料的矩形截面梁,  $M_e = \frac{bh^2}{6}\sigma_s$ ,  $M_u = \frac{bh^2}{4}\sigma_s$ , (其中  $b, h, \sigma_s$  分别为梁宽、梁高、材料屈服应力),因此  $\frac{P_u}{P_e} = \frac{9}{8} \frac{M_u}{M_e} = 1.6875$ 。当  $P_e < P < P_u$  时,梁部分区段外缘产生塑性变形,内核保持为弹性状态,称为弹塑性段,部分区段仍保持为弹性变形,称为弹性段。当  $P_e < P < P_u$  时,梁的弯矩分布、位移(挠度)、支反力与荷载的关系均不同于弹性阶段,分析于下。

## 2 固支端附近出现塑性变形阶段

在本阶段,梁固支端附近的部分区段( $a \leq l$ )处于弹塑性变形状态,而其它区段仍处于弹性变形状态。在本阶段结束时,集中荷载作用处的弯矩达到弹性极限弯矩  $M_e$ ,对应荷载记为  $P_1$ 。

在本阶段,  $P_e < P \leq P_1$ ,梁的弯矩分布虽仍可用式(1)来表达,但  $R_A$  与  $P$  不再是比例关系,梁的弯矩分布也因此发生变化。只要确定了  $R_A$ ,也就确定了弯矩分布,也就进一步求出位移。

这里研究理想弹塑性材料的矩形截面梁问题。梁发生弹塑性变形时,矩形截面理想弹塑性梁的曲率  $K$  和弯矩  $M$  关系如下<sup>[7]</sup>:

$$K = \begin{cases} -\frac{M}{EI} & (\text{弹性段}) \\ -\frac{K_e}{\sqrt{3 - \frac{2|M|}{M_e}}} \text{sign} M & (\text{弹塑性段}) \end{cases} \quad (4)$$

采用图2(a)所示的基本体系,图2(b)是基本体系在点A施加竖向单位荷载的弯矩图,图3(a)是  $P_e < P \leq P_1$  时的弯矩图。利用虚功原理和单位荷载法求图2(a)基本体系中点A的竖向位移  $\Delta_A$  如下:

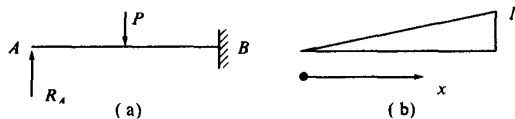


图2 基本体系及A点单位荷载弯矩图

Fig.2 Basic system and diagram of unit-load

moment for section A

$$\begin{aligned} \Delta_A &= \int_0^l MK dx = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{-R_A x^2}{EI} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{(P - R_A)x^2 - \frac{1}{2}Plx}{EI} dx + \\ &\quad \int_a^l \frac{\frac{K_e x}{\sqrt{3 + \frac{2(R_A - P)x + Pl}{M_e}}}}{EI} dx \\ &= \frac{16(P - R_A)a^3 - 12Pa^2l + Pl^2}{48EI} + \frac{K_e M_e (8M_e + 3Pl)}{6(R_A - P)^2} + \\ &\quad \frac{K_e (-6M_e - 4Pl + 2R_A l) \sqrt{(3M_e - Pl + 2R_A l)M_e}}{6(R_A - P)^2} \end{aligned} \quad (5)$$

由  $(R_A - P)a + \frac{Pl}{2} = -M_e$ , 得

$$a = \frac{2M_e + Pl}{2(P - R_A)} \quad (6)$$

将式(6)和  $K_e = \frac{M_e}{EI}$  代入式(5),并令  $\Delta_A = 0$ ,得

$$2P^2 R_A l^3 - PR_A^2 l^3 - 36M_e^2 Pl - 80M_e^3 + 16M_e(3M_e + 2Pl - R_A l) \sqrt{M_e(3M_e - Pl + 2R_A l)} = 0 \quad (7)$$

式(7)就是超静定梁在本阶段( $P_e < P \leq P_1$ )的约束反力  $R_A$  与荷载  $P$  的关系,可见  $R_A$  与  $P$  是复杂的非线性关系,给定荷载  $P$ ,就可由式(7)求出  $R_A$ ,也就能由式(1)求出梁的弯矩,也可进一步求出梁上任意点的位移。为了确定本阶段的荷载范围,下面确定  $P_1$  的数值。

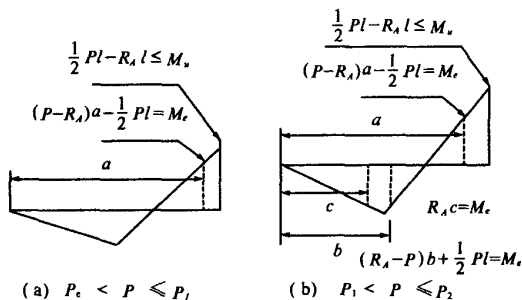


图3 弹塑性阶段弯矩图

Fig.3 Bending moment for elastic-plastic stage

当  $P = P_1$  时,  $\frac{1}{2} R_A l = M_e$ ,再分别利用式(7)、(6)得本阶段结束时的参数为

$$P_1 = \frac{6.3893 M_e}{l}, R_{A1} = \frac{2M_e}{l}, a_1 = 0.9557l \quad (8)$$

下面利用虚功原理和单位荷载法确定本阶段任意点的竖向位移。设点D是梁上任意点,其距端点A的距离为x,在点D施加单位荷载,图4是点D的单位荷载弯矩图,当  $0 \leq x < l/2$  时,点D的竖向位移  $\Delta_D$  为

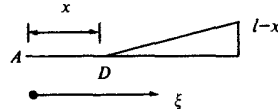


图4 点D单位荷载弯矩图

Fig.4 diagram of unit-load bending moment for section D

$$\begin{aligned}\Delta_A &= \int_0^l \overline{MK} dx = \int_x^{\frac{l}{2}} \frac{-(\zeta-x)R_A\zeta}{EI} d\zeta + \\ &\int_{\frac{l}{2}}^a \frac{(\zeta-x)[(P-R_A)\zeta - \frac{1}{2}Pl]}{EI} d\zeta + \\ &\int_a^l \frac{K_e(\zeta-x)}{\sqrt{3 + \frac{2(R_A-P)\zeta + Pl}{M_e}}} d\zeta \\ &= -\frac{R_A x^3}{6EI} + \frac{(PR_A l^2 - 12M_e^2)x}{8EI(P-R_A)} + \\ &\frac{PR_A l^3 - 2P^2 R_A l^3 + 36M_e^2 Pl + 80M_e^3}{48EI(P-R_A)^2} + \\ &K_e \frac{[-3M_e - 2Pl + R_A l - 3(R_A-P)x] \sqrt{3M_e - Pl + 2R_A l} M_e}{3(R_A-P)^2} \quad (9)\end{aligned}$$

当  $\frac{l}{2} \leq x < a$  时, 点  $D$  的竖向位移为

$$\begin{aligned}\Delta_D &= \int_x^a \frac{(\zeta-x)[(P-R_A)\zeta - \frac{1}{2}Pl]}{EI} d\zeta + \\ &\int_a^l \frac{K_e(\zeta-x)}{\sqrt{3 + \frac{2(R_A-P)\zeta + Pl}{M_e}}} d\zeta \\ &= \frac{(P-R_A)x^3}{6EI} - \frac{Plx^2}{4EI} + \frac{(P^2 l^2 - 12M_e^2)x}{8EI(P-R_A)} + \\ &\frac{80M_e^3 + 36M_e^2 Pl - P^3 l^3}{48EI(P-R_A)^2} + \\ &K_e \frac{[-3M_e - 2Pl + R_A l - 3(R_A-P)x] \sqrt{3M_e - Pl + 2R_A l} M_e}{3(R_A-P)^2} \quad (10)\end{aligned}$$

当  $a \leq x \leq l$  时, 点  $D$  的竖向位移为

$$\begin{aligned}\Delta_D &= \int_x^l \frac{K_e(\zeta-x)}{\sqrt{3 + \frac{2(R_A-P)\zeta + Pl}{M_e}}} d\zeta \\ &= K_e \sqrt{M_e} \left\{ \frac{[3M_e + Pl + 2(R_A-P)x]^{3/2}}{3(R_A-P)^2} - \right. \\ &\left. \frac{[3M_e + 2Pl - R_A l + 3(R_A-P)x] \sqrt{3M_e - Pl + 2R_A l}}{3(R_A-P)^2} \right\} \quad (11)\end{aligned}$$

上述公式(9)~(11)中  $R_A$  由式(7)确定。

### 3 集中荷载点附近产生塑性变形阶段

在本阶段, 随着荷载增加不仅梁固支端附近的弹塑性区段( $a \leq x \leq l$ )继续扩展, 而且集中荷载作用点附近部分区段( $c \leq x \leq b$ )也产生弹塑性变形, 而其它区段仍处于弹性变形状态。图3(b)是本阶段( $P_1 < P \leq P_2$ )的弯矩图。在本阶段结束时, 固支端处的弯矩达到塑性极限弯矩  $M_e$ , 即此时固支端成为塑性铰, 对应荷载记为

$P_2$ 。

$x = a, b$  和  $c$  时, 截面弯矩值均是弹性极限弯矩  $M_e$ , 由此得

$$a = \frac{2M_e + Pl}{2(P-R_A)}, b = \frac{-2M_e + Pl}{2(P-R_A)}, c = \frac{M_e}{R_A} \quad (12)$$

下面利用单位荷载法确定本阶段的  $R_A$  与  $P$  的非线性关系。本阶段图2基本体系中点  $A$  的竖向位移  $\Delta_A$  如下:

$$\begin{aligned}\Delta_A &= \int_0^l \overline{MK} dx = \int_0^c \frac{-R_A x^2}{EI} dx + \int_c^{\frac{l}{2}} \frac{-K_e x}{\sqrt{3 - \frac{2R_A x}{M_e}}} dx + \\ &\int_{\frac{l}{2}}^b \frac{-K_e x}{\sqrt{3 - \frac{2(R_A-P)x + Pl}{M_e}}} dx + \int_0^a \frac{(P-R_A)x^2 - \frac{1}{2}Plx}{EI} dx + \\ &\int_a^l \frac{K_e x}{\sqrt{3 + \frac{2(R_A-P)x + Pl}{M_e}}} dx \\ &= K_e \left[ \frac{(6M_e + R_A) \sqrt{3M_e - R_A l} M_e - 10M_e^2}{6R_A^2} \right. \\ &+ \frac{(-6M_e + 3Pl - R_A l) \sqrt{(3M_e - R_A l) M_e} + 20M_e^2}{6(R_A - P)^2} \\ &\left. + \frac{(-6M_e + 4Pl - 2R_A l) \sqrt{(3M_e - Pl + 2R_A l) M_e}}{6(R_A - P)^2} \right] \quad (13)\end{aligned}$$

令  $\Delta_A = 0$ , 得

$$\begin{aligned}&[P^2(6M_e + R_A l) + P(-12M_e R_A + R_A^2 l) \sqrt{3M_e - R_A l} M_e \\ &- (M_e + 4Pl - 2R_A l) R_A^2 \sqrt{(3M_e - Pl + 2R_A l) M_e} \\ &+ 10M_e^2(R_A^2 + 2PR_A - P^2)] = 0 \quad (14)\end{aligned}$$

式(14)就是图1超静定梁在本阶段( $P_1 < P \leq P_2$ )的约束反力  $R_A$  与荷载  $P$  的关系, 可见  $R_A$  与  $P$  是比上一阶段更复杂的非线性关系, 给定荷载  $P$ , 由式(14)求出  $R_A$ , 再由式(1)求出梁的弯矩, 也可进一步求出梁上任意点的位移。为了确定本阶段的荷载范围, 下面确定  $P_2$  的数值。

当  $P = P_2$  时,  $M_B = \frac{1}{2}Pl - R_A l = M_u = 1.5M_e$ , 再利用式(14)、(12)得本阶段结束时的参数为:

$$\begin{aligned}P_2 &= \frac{8.663 \cdot 2M_e}{l}, R_{A2} = \frac{2.831 \cdot 6M_e}{l}, a_2 = 0.914 \cdot 3l, \\ b_2 &= 0.571 \cdot 3l, c_2 = 0.353 \cdot 2l \quad (15)\end{aligned}$$

同理, 利用单位荷载法确定本阶段任意点  $D$  的竖向位移。当  $0 \leq x < c$  时, 竖向位移  $\Delta_D$  为:

$$\begin{aligned}\Delta_D &= \int_x^c \frac{-(\zeta-x)R_A\zeta}{EI} d\zeta + \\ &\int_c^{\frac{l}{2}} \frac{-K_e(\zeta-x)}{\sqrt{3 - \frac{2R_A\zeta}{M_e}}} d\zeta + \int_{\frac{l}{2}}^b \frac{-K_e(\zeta-x)}{\sqrt{3 - \frac{2(R_A-P)\zeta + Pl}{M_e}}} d\zeta +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \frac{(\zeta - x)[(P - R_A)\zeta - \frac{1}{2}Pl]}{EI} d\zeta + \\
& \int_a^l \frac{K_e(\zeta - x)}{\sqrt{3 + \frac{2(R_A - P)\zeta + Pl}{M_e}}} d\zeta \\
= & -\frac{R_A}{6EI}x^3 + K_e \left\{ \frac{(9R_Ax - 10M_e)M_e}{6R_A^2} + \frac{10M_e^2}{3(R_A - P)^2} \right. \\
& - \frac{[6M_e + 4Pl - 2R_Al + 6(R_A - P)x]\sqrt{(3M_e - Pl + 2R_Al)M_e}}{6(R_A - P)^2} \\
& - \frac{[6M_e - 3Pl + R_Al + 6(P - R_A)x]\sqrt{(3M_e - R_Al)M_e}}{6(R_A - P)^2} \\
& \left. + \frac{(6M_e + R_Al - 6R_Ax)\sqrt{(3M_e - R_Al)M_e}}{6R_A^2} \right\} \quad (16)
\end{aligned}$$

当  $c \leq x < l/2$  时, 求出点  $D$  的竖向位移为

$$\begin{aligned}
\Delta_D = & K_e \left\{ \frac{10M_e^2}{3(R_A - P)^2} \right. \\
& - \frac{[6M_e + 4Pl - 2R_Al + 6(R_A - P)x]\sqrt{(3M_e - Pl + 2R_Al)M_e}}{6(R_A - P)^2} \\
& - \frac{[6M_e - 3Pl + R_Al + 6(P - R_A)x]\sqrt{(3M_e - R_Al)M_e}}{6(R_A - P)^2} \\
& \left. + \sqrt{M_e} \frac{(6M_e + R_Al - 6R_Ax)\sqrt{3M_e - R_Al} - 2(3M_e - 2R_Ax)^{\frac{3}{2}}}{6R_A^2} \right\} \quad (17)
\end{aligned}$$

当  $l/2 \leq x < b$  时, 求出点  $D$  的竖向位移为

$$\begin{aligned}
\Delta_D = & K_e \left\{ \frac{[3M_e - Pl + 2(P - R_A)x]^{\frac{3}{2}}\sqrt{M_e} + 10M_e^2}{3(R_A - P)^2} \right. \\
& \left. - \frac{[3M_e + 2Pl - R_Al + 3(R_A - P)x]\sqrt{(3M_e - Pl + 2R_Al)M_e}}{3(R_A - P)^2} \right\} \quad (18)
\end{aligned}$$

上述公式(16)~(18)中  $R_A$  由式(14)确定。

当  $b \leq x < a$  时, 点  $D$  的竖向位移公式与公式(10)相同; 当  $a \leq x < l$  时, 点  $D$  的竖向位移公式与公式(11)相同。公式虽然相同但  $x$  和  $P$  的取值范围不同, 而且, 其中的  $R_A$  是由式(14)确定的。

## 5 固支端保持为塑性铰阶段

在本阶段, 固支端保持为塑性铰,  $\frac{1}{2}Pl - R_Al = M_u = 1.5M_e$ , 因此梁结构成为静定结构,  $R_A$  与  $P$  虽是线性关系但不是比例关系, 给定荷载  $P$ , 可由下式求出  $R_A$

$$R_A = \frac{1}{2}P - 1.5 \frac{M_e}{l} \quad (19)$$

由式(1)得弯矩分布为

$$M = \begin{cases} (\frac{1}{2}P - 1.5 \frac{M_e}{l})x & (0 \leq x \leq \frac{l}{2}) \\ (-\frac{1}{2}P - 1.5 \frac{M_e}{l})x + \frac{Pl}{2} & (\frac{l}{2} < x \leq l) \end{cases} \quad (20)$$

在弹塑性阶段, 由于塑性铰引起的内力重分布,

虽然集中力附近的弹塑性区随着荷载增加继续扩展, 但固支端附近的弹塑性变形区域发生卸载, 当  $a_2 \leq x \leq l$  时, 曲率为

$$K = (K)_{P=P_2} - \frac{\Delta M}{EI} \quad (21)$$

式中,  $\Delta M = \frac{1}{2}(P - P_2)(l - x)$ 。

在本阶段结束时, 跨中集中力作用点的弯矩达到塑性极限弯矩  $M_u$ , 形成塑性铰, 达塑性极限状态, 结构成为机构, 丧失进一步的承载能力, 此时对应荷载即为极限荷载,  $P_u = \frac{6M_u}{l} = \frac{9M_e}{l}$ 。

同理, 利用单位荷载法可求出任意点  $D$  的竖向位移。当  $0 \leq x < c$  时, 点  $D$  的竖向位移为

$$\begin{aligned}
\Delta_D = & \int_0^l MK dx = \int_x^c \frac{(\zeta - x)R_A\zeta}{EI} d\zeta + \int_c^{\frac{l}{2}} \frac{K_e(\zeta - x)}{\sqrt{3 - \frac{2R_A\zeta}{M_e}}} d\zeta + \\
& \int_{\frac{l}{2}}^b \frac{-K_e(\zeta - x)}{\sqrt{3 - \frac{2(R_A - P)\zeta + Pl}{M_e}}} d\zeta + \\
& \int_b^{a_2} \frac{(\zeta - x)[(P - R_A)\zeta - \frac{1}{2}Pl]}{EI} d\zeta + \\
& \int_{a_2}^l (\zeta - x) \left[ \frac{K_e}{\sqrt{3 + \frac{2(R_A - P_2)\zeta + Pl}{M_e}}} - \frac{1}{2EI}(P - P_2)(l - \zeta) \right] d\zeta \\
= & -\frac{R_A}{6EI}x^3 + K_e \left\{ \frac{(80M_e^2 - 45M_ePl - 6P^2l^2)l^2}{12(Pl + 3M_e)^2} + \right. \\
& \frac{(6M_e + R_Al - 6R_Ax)\sqrt{(3M_e - R_Al)M_e} + (9R_Ax - 10M_e)M_e}{6R_A^2} \\
& + \frac{[-6M_e + 3Pl - R_Al - 6(P - R_A)x]\sqrt{(3M_e - R_Al)M_e}}{6(P - R_A)^2} \\
& \left. + \frac{(3Pl + 12M_e)lx}{4(Pl + 3M_e)} + 0.5637l^2 - 0.8143lx \right\} \quad (22)
\end{aligned}$$

当  $c \leq x < \frac{l}{2}$  时, 可求出点  $D$  的竖向位移为

$$\begin{aligned}
\Delta_D = & K_e \left\{ \frac{(80M_e^2 - 45M_ePl - 6P^2l^2)l^2}{12(Pl + 3M_e)^2} + \frac{(3Pl + 12M_e)lx}{4(Pl + 3M_e)} + \right. \\
& \sqrt{M_e} \frac{(6M_e + R_Al - 6R_Ax)\sqrt{3M_e - R_Al} - 2(3M_e - 2R_Ax)^{\frac{3}{2}}}{6R_A^2} \\
& + \frac{[-6M_e + 3Pl - R_Al - 6(P - P_A)x]\sqrt{(3M_e - R_Al)M_e}}{6(P - R_A)^2} \\
& \left. - 0.5637l^2 - 0.8143lx \right\} \quad (23)
\end{aligned}$$

上述公式(22)、(23)中  $R_A$  由式(19)确定。

当  $\frac{l}{2} \leq x < b$  时, 可求出点  $D$  的竖向位移为

$$\Delta_D = K_e \left[ \frac{-4[3M_e - Pl + (Pl + 3M_e)\frac{x}{l}]^{\frac{3}{2}}\sqrt{M_e}}{3(Pl + 3M_e)^2} + \right.$$

$$\frac{(80M_e^2 - 45M_ePl - 6P^2l^2)l^2}{12(Pl + 3M_e)^2} + \frac{(3Pl + 12M_e)lx}{4(Pl + 3M_e)} + 0.5637l^2 - 0.8143lx \quad (24)$$

当  $b \leq x < a_2$  时,可求出点  $D$  的竖向位移为

$$\Delta_D = \frac{1}{12EI} \left[ \left( P + \frac{3M_e}{l} \right) x^3 - 3Plx^2 + 3Pl^2x - Pl^3 \right] + K_e(0.5637l^2 - 0.8143lx) \quad (25)$$

当  $a_2 \leq x < l$  时,可求出点  $D$  的竖向位移为

$$\Delta_D = \frac{1}{12EI} \left[ \left( P - \frac{8.6632M_e}{l} \right) (x^3 - 3lx^2 + 3l^2x - l^3) \right] + 0.3904K_e l^2 \left( 1 - \frac{x}{l} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (26)$$

## 6 结束语

本文研究了在跨中集中荷载作用下一次超静定理想弹塑性矩形截面梁的全部受力变形过程。受力变形分为四个阶段,第一阶段为弹性阶段,在第一阶段,弯矩随荷载  $P$  的增加按比例增加,零弯矩截面位置不变,而后三个阶段零弯矩截面位置随荷载  $P$  的增加不断地变化,弯矩随荷载  $P$  的增加也不再是按比例增加;第二阶段在固支端附近的一段产生了弹塑性变形;进入第三阶段后不仅固支端附近的弹塑性变形区继续扩展,集中荷载作用点附近的一段也产生了弹塑性变形,直至固支端形成塑性铰;在第四阶段,固支端保持为塑性铰,上一阶段的固支端附近的弹塑性区发生卸载,而中部区段的弹塑性变形区继续扩展,直至集

中荷载作用处形成塑性铰而成为塑性流动机构;

各阶段的荷载终值分别为  $P_e = \frac{16M_e}{3l}$ ,  $P_1 = \frac{6.3893M_e}{l}$ ,  $P_2 = \frac{8.6632M_e}{l}$ ,  $P_u = \frac{9M_e}{l}$ 。本文给出了各阶段的弯矩、位移公式,可供工程结构设计和结构力学、塑性力学教学参考。

## 参考文献:

- [1] PARATHAP J, VARADAN T K. The inelastic large deformation of beams[J]. J Appl Mech Trans ASME, 1976, 43:689 - 690.
- [2] LO C C, GUPTA S D. Bending of a non - linear rectangular beam in large deflection[J]. J Appl Mech Trans ASME, 1978, 45:213 - 215.
- [3] 伍小强,余同希. 悬臂梁弹塑性大挠度全过程的分析[J]. 力学学报, 1986, 18(6):516 - 527.
- [4] 干 洪. 梁的弹塑性大挠度数值分析[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(6):633 - 639.
- [5] 曹天捷,杜蓬娟. 一次超静定理想弹塑性梁的全过程分析[J]. 工程力学, 1999, 16(3):105 - 112.
- [6] 包世华. 结构力学[M]. 武汉:武汉工业大学出版社, 2001.
- [7] 王 仁,黄文彬,黄筑平. 塑性力学引论[M]. 北京:北京大学出版社, 1992.
- [8] 夏志皋. 塑性力学[M]. 上海:同济大学出版社, 2002.
- [9] 李会知. 超静定梁的弹塑性分析[J]. 力学与实践, 2004, 26(4):80 - 82.

## The Analysis of the Entire Elastic - Plastic Process of a Statically Indeterminate Beam with One Redundant

LI Hui - zhi<sup>1</sup>, LIU Min - shan<sup>2</sup>, CHEN Huai<sup>1</sup>

(1. School of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China; 2. Research Center of Heat Energy Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China)

**Abstract:** By using the virtual work principle and unit - load method, the elastic - plastic process of loading and deformation of a statically indeterminate beam with one redundant under a concentrated load is analyzed. The process can be divided into four stages: I) The whole beam is in elastic state; II) The beam is in elastic - plastic state in the vicinity of the fixed end; III) The beam is in elastic - plastic state in the vicinity of both fixed end and the point where the concentrated load acts; IV) The fixed end behaves as a plastic hinge, and the plastic region near the point where the concentrated load acts is developing, while that near the fixed end unloading. The formulae of moment and displacement are derived and the correlation between the load and the supporting reaction force is given respectively at each stage mentioned above. The results obtained can be applied to engineering structure design and mechanics teaching and learning.

**Key words:** statically indeterminate beam; elastic - plastic; unit load method; plastic hinge; concentrated load