文章编号:1671-6833(2005)03-0083-03

基于波方程边界反馈控制系统稳定性的谱分析

贾军国[1,2], 郭同德[3]

(1.西安交通大学理学院,陕西 西安 710000;2.郑州大学数学系,河南 郑州 450052;3.郑州大学环境与水利学院,河南 郑州 450002)

摘 要:对具反馈边界控制问题中的一维带黏性阻力和恢复力的波方程系统,在函数空间中将其化为抽象Cauchy 问题,其系统算子具预解紧且是某C_0压缩半群的生成元,得到了系统算子的谱分布特征,包括其谱点实部的上确界小于零以及谱点位于某平行于虚轴的有限带域中,为进一步讨论该系统的稳定性、可控性及Riesz 基性质奠定了基础.

关键词:谱分布;稳定性;波方程;预解紧;C_0半群

中图分类号:O 317;O 313.7;O 231.4 **文献标识码**:A

0 引言

控制论著名学者R.Dakto 等[1]在讨论时滞对系统稳定性影响时指出:采用文献[2]中的能量不变法(the energy invariant method),可证明波方程边界反馈控制系统关于任意粘性和反馈系数都是稳定的.我们认为:文献[2]的方法不适宜用于带黏性项的波方程边界反馈系统.

P.Grabowski[3]全面分析了在混合反馈系统包括波方程中谱方法(spectral approach)对适定性及稳定性的应用,且分析了能量不变法的局限性.类比文献[4],我们引入Hilbert 空间,将偏微分方程边值问题化为抽象Cauchy 问题:$W(t)=AW(t)$.由文献[5]知,当谱定增长条件成立时,系统的稳定性就取决于算子A 的谱界σ_0是否小于零?这里$\sigma_0=\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda:\lambda\in\sigma(A)\}$.而当系统具有Riesz 基时,系统必满足谱定增长条件,且系统的Riesz 基性质与系统算子的谱特征紧密相关.本文就是通过刻划系统算子的谱特征从而确定系统的稳定性的,具体考虑的模型是下述一维黏性波动方程的边值问题:

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+2au_t+a^2u=0 \\ u=u(x,t),x\in[0,1],t\in[0,+\infty) \\ u(0,1)=0,u_x(1,t)=-ku_t(1,t) \\ u(x,0)=u_0(x),u(x,1)=v_0(x) \end{cases} \quad (1)$$

其中:$u(x,t)$表示黏弹性波动质点的位移函数;两个物理参数a,k均为正数,分别表示系统的黏性阻尼系数和控制反馈系数;u_0,v_0是两个已知的平方可积函数.

设$V_0^1=\{v(x)\in L^2[0,1]:v'(x)\in L^2[0,1],v(0)=0\}$,与文[1]能量泛函$E(u,t)$一致,引入内积空间:$H=V_0^1\times L^2[0,1]$,其内积为

$$<(u,v)^{\mathrm{T}},(f,g)^{\mathrm{T}}>=\int_0^1[u'(x)\bar{f}'(x)+a^2\cdot u(x)\cdot\bar{f}(x)+v(x)\cdot\bar{g}(x)]\mathrm{d}x \quad (2)$$

推知,H 为Hilbert 空间,引入算子$A:H\supset D(A)\to H$,使式(1)等价于柯西算子方程:

$$\begin{cases} W'(t)=AW(t) \\ W(0)=W_0 \end{cases}$$

其中:$W(t)=(u(x,t),u_t(x,t))^{\mathrm{T}}\in D(A)$.$W_0\in H$.

第一节给出算子A的定义,且A可生成一强连续有界线性算子半群即C_0类半群$T(t)$,从而柯西算子方程的解可以表为:$W(t)=T(t)W_0$.这样系统:(1)的稳定性即化为半群$T(t)$的稳定性.进一步:A是具预解紧的,且其预解特征方程为:$\Delta(\lambda)=0$.第二节通过考察超越复函数$\Delta(\lambda)$的零点分布,得到了算子A的谱结构特征,包括:$\sigma_0\leqslant-a_1$这里$a_1=a-\max\left\{0,a-\frac{1}{k}\right\}$,即$a_1=\begin{cases} a & ak\leqslant1 \\ 1/k & ak>1 \end{cases}$从而$0<a_1\leqslant a$,这样文献[1]中,$E(u,t)\leqslant C\cdot e^{-\alpha t}\cdot E(u,0)$.式中的$\alpha$有关系:$\alpha\geqslant2a_1$,即系统的指数稳定性速率同两个物理参数

收稿日期:2005-03-10;**修订日期**:2005-04-30

作者简介:贾军国(1962-),男,河南省镇平县人,郑州大学副教授,西安交通大学博士研究生,主要研究应用泛函、控制理论及应用.

a, k 建立了联系. 另外还得到: A 的谱点位于以平行于虚轴且在左半平面上的一个有限带域中, 该性质事实上是算子 A 生成群的必要条件.

1 系统算子及其谱特征方程

首先给出 H 中算子 A 的定义, 令 $A: H\to H$ 使

$$\begin{cases} A(u,v)^{\mathrm T}=(v,u''-2av-a^2)^{\mathrm T},(u,v)^{\mathrm T}\in D(A) \\ D(A)=\left\{(u,v)^{T}\in H\left| \begin{matrix} u',u'',v'\in L^2[0,1] \\ u'(0)=0,u'(1)=-kv(1) \end{matrix}\right.\right\} \end{cases} \tag{3}$$

由微分算子的边值性质, 可知 A 为 $H\supset D(A)\to H$ 上的无界闭稠定线性算子, 且易得:

定理1 由(3)定义的系统算子 A 在 H 上可生成一压缩 C_0 类半群, 即 A 是一强连续有界线性算子半群的无穷小生成元.

由定理1系统(1)的解是适定的, 从而对谱确定增长条件成立的系统就有:

$$\|e^{tA}\|^2\leqslant ce^{-\alpha t},\ \alpha=-2\sup\{Re\,\lambda\mid\lambda\in\sigma(A)\}=-2\sigma_0 \tag{4}$$

定理2 算子 A 具紧豫解式, 且其谱特征方程为: $\Delta(\lambda)=0$ 其中:

$\Delta(\lambda)=(\lambda+a)\mathrm{ch}(\lambda+a)+k\lambda\mathrm{sh}(\lambda+a)$; 而 $\mathrm{ch}\,x$, $\mathrm{sh}\,x$ 分别表双曲正、余弦函数.

证明: 考查豫解方程: $(\lambda I-A)W=Y$, 其中, $\lambda\in C$, $W=(u,v)^{\mathrm T}\in D(A)$, $Y=(y,z)^{\mathrm T}\in H$, 即有下述方程组:

$$\begin{cases} \lambda u-v=y, \\ \lambda v-u''+2av+a^2u=z, \end{cases}$$

求解得:

$$\begin{cases} u=u(x)=c_1e^{-(\lambda+a)x}+c_2e^{(\lambda+a)x}+y_* \\ y_*=\dfrac{1}{\lambda+a}\displaystyle\int_0^x\mathrm{sh}((\lambda+a)(x-s))f_\lambda(s)\mathrm ds \end{cases} \tag{5}$$

由 $(u,v)^{\mathrm T}\in D(A)$ 知: $u=u(x)=c\cdot\mathrm{sh}((\lambda+a)x)+y_*$, 其中: $f_\lambda(x)=-(z+(\lambda+2a)y)$.

为确定待定系数 c, 通过求 $u(1)$, $u'(1)$, 并代入 $\begin{cases} v(1)=\lambda u(1)-y(1) \\ u'(1)=-kv(1) \end{cases}$ 可得到: $k\lambda\mathrm{sh}(\lambda+a)+(\lambda+a)\mathrm{ch}(\lambda+a)\neq0$ 时, c 被唯一确定, 即得 $u=u(x)$, 故 $W=(u,v)^{\mathrm T}=(\lambda I-A)^{-1}Y=(\lambda I-A)^{-1}(y,z)^{\mathrm T}$. 直接计算知 $(\lambda I-A)^{-1}$ 为 $H\to D(A)$ 上的有界线性算子, 故 A 的谱点满足:

$$\Delta(\lambda)=(\lambda+a)\mathrm{ch}(\lambda+a)+k\lambda\mathrm{sh}(\lambda+a)=0 \tag{6}$$

即 A 的谱集 $\sigma(A)=\{\lambda\in C\mid\Delta(\lambda)=0\}$, 我们称式(6)为 A 的谱特征方程. 由文献[6]不难通过积分核算子及索伯列夫嵌入定理, 可知 A^{-1} 为紧的, 从而知 A 为豫解紧算子. 证毕.

由此 A 的谱点均为本征值, 即 $\sigma(A)=\sigma_p(A)$, 且 $\sigma_p(A)$ 为至多以 ∞ 为聚点的可数集.

2 系统算子的谱分析

定理3 设 $\sigma_0=\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda\mid\lambda\in\sigma(A)\}$, 则由估计式: $\sigma_0\leqslant-a_1$, 其中: $a_1=a-\max\{0,a-\dfrac1k\}\in(0,a]$.

证明: 注意到 $\Delta(-a)=0$, 即 $\lambda=-a$ 为 A 之谱点. 1^0. 先考查 λ 在实轴上情形. 设 $\lambda=x>-a$, 且令: $t=x+a>0$, 再设: $f(t)=t\mathrm{ch}t+k(t-a)\mathrm{sh}t$, $t\in(0,\infty)$ 则 $\Delta(x)=0$ 化为: $f(t)=0$, 而由 $f'(t)=[1+kt-ka)\mathrm{ch}t+(t+k)\mathrm{sh}t$, $t>0$ 知:

①当 $ka\leqslant1$ 时, $f'(t)>0$, 即有: $f(t)>f(0)=0$, $t>0$, 此时 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内无零点, 亦即 $\Delta(x)$ 在 $(-a,+\infty)$ 内无零点.

②当 $ka>1$ 时, 令 $t_0=a-\dfrac1k>0$, 则当 $t\geqslant t_0$ 时, 有: $1+kt-ka\geqslant0$, 且 $f'(t)>0$, 而: $f(t)\geqslant f(t_0)=t_0\mathrm{ch}t_0-\mathrm{sh}t_0>0$, $t\geqslant t_0$, 此时 $f(t)$ 在 $[t_0,+\infty]$ 内无零点, 即 $\Delta(x)$ 在 $[-\dfrac1k,+\infty)$ 内无零点.

综合①、②知: 当令 $a_1=a-\max\{0,a-\dfrac1k\}$ 时, $\Delta(x)$ 在 $(-a_1,+\infty)$ 内无零点.

2^0. 再考查 $\lambda\in\{\lambda\in C\mid\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant-a, Im\,\lambda\neq0\}$, 下证明 λ 均非 $\Delta(\lambda)$ 零点. 事实上: 令 $\mu=\lambda+a$ 或 $\lambda=\mu-a$, 则: $\Delta(\lambda)=\mu\cdot\mathrm{ch}\,\mu+k(\mu-a)\,\mathrm{sh}\,\mu=0$

$$\tag{7}$$

设 $\mu=x+yi$, $y\neq0$ 将其代入(7)比较实部、虚部系数得:

$$\begin{cases} \mathrm{sh}\,x\cos y\cdot k(x-a)-\mathrm{ch}\,x\sin y\cdot ky=y\cdot\mathrm{sh}\,x\sin y-x\cdot\mathrm{ch}\,x\cos y \\ \mathrm{ch}\,x\sin y\cdot k(x-a)+\mathrm{sh}\,x\cos y\cdot ky=-y\mathrm{ch}\,x\cos y-x\cdot\mathrm{ch}\,x\sin y \end{cases} \tag{8}$$

即式(7)成立当且仅当式(8)成立. 注意到 $x=\mathrm{Re}\,\mu=\mathrm{Re}\,\lambda+a\geqslant0$, 当 $x=0$ 时, 由式(8)知: $y\sin y=0$ 及 $y\cos y-ka\sin y=0$ 同时成立, 从而 $y=0$, 这与 $Im\lambda\neq0$ 矛盾, 即 $\mathrm{Re}\,\lambda=-a$ 上除 $\lambda=-a$ 外无 $\Delta(\lambda)$ 之零点. 下设 $x>0$, $y\neq0$, 由于 $\begin{vmatrix} \mathrm{sh}\,x\cos y & -\mathrm{ch}\,x\sin y \\ \mathrm{ch}\,x\sin y & \mathrm{sh}\,x\cos y \end{vmatrix}=\mathrm{sh}^2x\cos^2y+\mathrm{ch}^2x\sin^2y=\dfrac12(\mathrm{ch}\,2x-\cos2y)>\dfrac12(1-\cos2y)\geqslant0$, $x\neq0$ 从而

由克莱姆法则知: $k(x-a)=-\dfrac{y\sin2y+x\mathrm{sh}\,2x}{\mathrm{ch}\,2x-\cos2y}$ 同时 $ky=\dfrac{x\sin2y-y\mathrm{sh}\,2x}{\mathrm{ch}\,2x-\cos2y}$. 这样式(8)成立, 当且仅当上两式同时成立.

令 $h(x,y)=k(\mathrm{ch}\,2x-\cos2y)+\mathrm{sh}\,2x-2x\cdot$

$\frac{\sin 2y}{2y}$，$x>0$ 则 $h(x,y)=0$ 是式(8)成立的必要条件，利用 $\sup\limits_{y\neq 0}\frac{\sin 2y}{2y}=1$，有 $h(x,y)\geqslant k(\mathrm{ch}\,2x-1)+\mathrm{sh}\,2x-2x$，令：$g(x)=k(\mathrm{ch}\,2x-1)+\mathrm{sh}\,2x-2x$，则由 $g(0)=0$，$g'(x)>0$ 得：当 $x>0$ 时，有：$h(x,y)\geqslant g(x)>0$ 时，即(8)无解，从而得：$\Delta(\lambda)$ 在 $\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant -a$，$\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0$ 时无零点.

综合 1^0、2^0 知：$\Delta(\lambda)$ 在 $\mathrm{Re}\,\lambda>-a_1$ 中无零点，$\sigma_0=\sup\{\mathrm{Re}\,\lambda\,|\,\Delta(\lambda)=0\}\leqslant -a_1$. 证毕.

定理4　算子 A 的谱点即 $\Delta(\lambda)$ 的零点，分布在虚轴左侧一个平行于虚轴的有限带域里.

证明：设 $\Delta(\lambda)=0$，由定理3知：$\mathrm{Re}\,\lambda\leqslant -a_1$，下证必存在充分大之正数 b，使得：$\mathrm{Re}\,\lambda\geqslant -b$，下分两种情况讨论：

1^0. 在实轴上，$\mathrm{Im}\,\lambda=0$，$\lambda=x=\mathrm{Re}\,\lambda$

$\Delta(\lambda)=\Delta(x)=(x+a)\cdot\mathrm{ch}(x+a)+k\cdot x\cdot\mathrm{sh}(x+a)\xrightarrow{t=x+a}t\cdot\mathrm{ch}t+k(t-a)\cdot\mathrm{sh}t$

同定理3证明中记号类似，记 $f(t)=t\mathrm{ch}t+k(t-a)\mathrm{sh}t$，$t\in(-\infty,0)$. 直接计算知 $\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=\begin{cases}+\infty & k\geqslant 1\\ -\infty & k<1\end{cases}$，从而存在 $b_1>a$ 使当 $x<-b_1$ 时 $\Delta(x)\neq 0$

2^0. 当 $y=\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0$ 时，$\Delta(\lambda)=0$ 等价于 $h(x,y)=0$ 成立，这里 $h(x,y)=k(\mathrm{ch}\,2x-\cos 2y)+\mathrm{sh}\,2x-2x\cdot\frac{\sin 2y}{2y}$，$x<0$，$y\neq 0$. 下考查 $h(x,y)$ 的零点位置：设 $k\neq 1$，易得结论. 当 $k=1$，$h(x,y)=\mathrm{ch}\,x-\cos y+\mathrm{sh}\,x-x\frac{\sin y}{y}=\mathrm{e}^x-\cos y-x\frac{\sin y}{y}$ 将 R^2 之左半平面除 X 轴外分成如下3部分：

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{matrix}x<0\\ y\neq 0\end{matrix}\right\}=\bigcup_{i=1}^{3}D_i\text{，其中：}$$

$$D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{matrix}x<0\\ \frac{\sin y}{y}>0\end{matrix}\right\},\quad D_2=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{matrix}x<0\\ \frac{\sin y}{y}>0\end{matrix}\right\},$$

$$D_3=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{matrix}x<0\\ \sin y=0,y\neq 0\end{matrix}\right\}=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{matrix}x<0\\ y=m\pi,y\neq 0\end{matrix}\right\}$$

分别计算知：当 $(x,y)\in D_i$，$i=1,2,3$ 时，有 $b>0$，使当 $\mathrm{Re}\,\lambda<-b$ 时，$\Delta(\lambda)\neq 0$. 证毕.

参考文献：

[1] DAKTO R, LAGNESS J, POILLIS M P. An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations[J]. SIAM J Control and Optima, 1986, 24(1): 152～156.

[2] CHEN G. Energy decay estimates and exact boundary value controllability for the wave equation in a bounded domain[J]. J Math Pures Appl, 1979, 58: 249～274.

[3] GRABOWSKI P. Spectral approach to well-posedness and stability analysis of hybrid feedback systems[J]. J Math Sys Estimation and Control, 1996, 6(1): 1～40.

[4] 徐建国，贾军国. 函数空间中多体柔性系统稳定性与可控性的动力学研究[J]. 应用数学与力学，2001，22(12)：1410～1421.

[5] HANG F L. Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical system in Hilbert spaces[J]. Chin Ann Differ Esq, 1985, 1: 43～56.

[6] PAZY A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.

The Spectral Analysis of Stability Based on the Wave System with Boundary Feedback Control

JIA Jun-guo[1,2], GUO Tong-de[3]

(1. School of Sciences, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710000, China; 2. Mathematics Department, Zhengzhou University, Zhengzhou 450052, China; 3. School of Environmental & Hydraulic Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: For one-dimensional wave equation with viscous damping and a restoring force in the problem of boundary feedback control, we abstract it as a Cauchy problem in the functional space. We give that the system operator generates a C_0 semigroup and has compact resolvent. Furthermore, we get the spectral feature of the system operator, including the spectrum, which lies in the left half plane, and it is in a limited strip region paralleled to the imaginary axis. The work paves a ground for further discussing the stability, controllability and Riesz base's properties of the system.

Key words: spectrum distribution; stability; wave equation; boundary feedback control; compact resolvent; C_0-semigroup