

文章编号:1671-6833(2004)02-0023-05

一边支承矩形板弯曲精确解法

许琪楼<sup>1</sup>, 白 杨<sup>1</sup>, 王 海<sup>2</sup>

(1. 郑州大学土木工程学院, 河南 郑州 450002; 2. 河南省水利科学研究所, 河南 郑州 450003)

**摘 要:**一边支承矩形板由于边界条件的多样性导致板中内力分布的复杂性, 现有解法存在计算方法不统一, 计算精度低, 适用范围小等缺陷. 提出的精确解法将板的弯曲划分为广义静定和广义超静定两类, 对于前者, 提出一个统一的通解表达式并采用组合特解, 该特解在满足板弯曲平衡微分方程的同时, 还可以满足支承边的挠度条件、自由边上剪力分布条件、自由角点集中力条件及柱支座处的反力条件, 从而可以利用四边边界条件及柱支座处的位移条件直接求解. 对于广义超静定弯曲, 采用叠加法求解. 逆向分析算例表明, 本解法具有很高的计算精度.

**关键词:**矩形板; 弹性板弯曲; 精确解法  
**中图分类号:** TU 311.4 **文献标识码:** A

0 引言

图 1 所示一边支承(简支或固定)矩形板, 由于同时存在支承边、自由边、自由角点和柱支座, 板中的内力分布非常复杂. 文献[1~6]曾先后解决了一边固定或一边简支并有一个或二个角点支座时在各种荷载作用下的弯曲, 但上述解法有一定的局限性, 具体表现为:

(1) 一边固定板与一边简支板有相似的边界

条件, 但却采用了截然不同的挠度表达式, 计算方法不统一.

(2) 柱支座局限在板角点上, 无法解决图 1 (d)、(e) 所示板的弯曲.

(3) 当支承边发生竖向位移或自由边作用竖向剪力时, 计算精度差.

本文解法采用统一的挠度表达式, 可以解决图 1 所示各种矩形板在任意荷载作用下及支承边和柱支座发生任意位移时的弯曲, 且具有很高的计算精度.

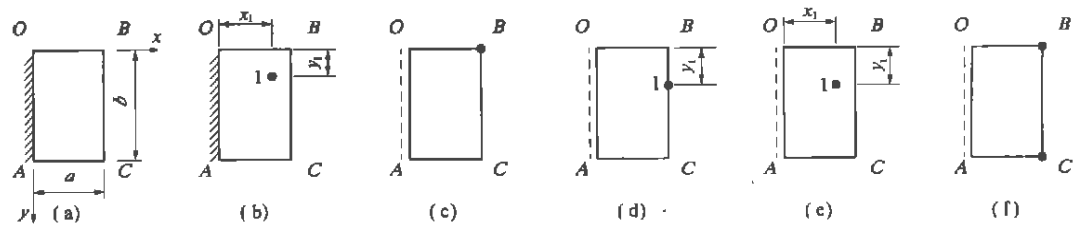


图 1 一边支承的矩形板  
Fig. 1 Rectangular plates with one supported edge

1 二类弯曲

弹性薄板在板面法向荷载  $q(x, y)$  作用下, 挠度  $W$  应满足下列平衡微分方程

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (1)$$

式中:  $D$  为板的弯曲刚度. 挠度  $W$  还应满足板的边

界条件, 板的边界有固定边、简支边、自由边, 在这些边界上存在两个边界力和两个边界位移 4 个参数, 其中两个参数是已知的, 两个参数是未知的. 由于式 (1) 是考虑静力平衡条件、几何方程和物理方程综合而成, 边界上的位移边界条件和内力边界条件是等效的, 即每条边界上未知量数和已知条件数是相等的, 这些边界的求解条件是完备的.

挠度  $W$  还应满足柱支座处的支承条件和反力条件,柱支座可以在板中、板边界或板角点上.柱支座处的挠度是已知的,但支承反力却有两种可能,由于支承反力只能通过静力平衡条件求解,与几何方程与物理方程无关,因此当柱支反力是已知时,求解条件是完备的,否则是不完备的.前者称为静定弯曲,它可以由板的四边边界条件、柱支座处的支承条件直接求解,后者称为超静定弯曲,要采用叠加法求解,这与文献[1~9]的求解思想是相通的.

2 静定弯曲

图 1(a) 所示悬臂板,一边支承三边自由是静定弯曲.图 1(c), (d), (e) 所示一边简支一柱支座支承的矩形板,由于柱支反力可以由静力平衡条件确定,也是静定弯曲.当撤去柱支座而代之以支反力时,计算简图也为一边支承三边自由矩形板在原荷载和支反力共同作用下的弯曲.静定弯曲的挠度表达式为

$$W=W_1+W_2 \tag{2}$$

式中:  $W_1$  为式 (1) 对应的齐次方程通解;  $W_2$  为方程 (1) 的特解.取

$$\begin{aligned} W_1 = & \sum_{m=1,3,5} (A_m \text{sh } \alpha y + B_m \text{ch } \alpha y + C_m \alpha \text{sh } \alpha y + \\ & D_m \alpha \text{ch } \alpha y) \sin \alpha x + E_0 x + F_0 + G_0 x^2 + \\ & H_0 x^3 + \sum_{n=1,2} (E_n \text{sh } \beta x + F_n \text{ch } \beta x + \\ & G_n \beta \text{sh } \beta x + H_n \beta \text{ch } \beta x) \cos \beta y \end{aligned} \tag{3}$$

式中:  $\alpha = \frac{m\pi}{2a}$ ,  $\beta = \frac{n\pi}{b}$ . 应当指出,  $E_0, F_0, G_0, H_0$  是  $n=0$  时的  $E_n, F_n, G_n, H_n$ . 因为在  $[0, b]$  区间上,  $\sum_{n=0,1,2} \cos \beta y$  是一个完整的正交三角函数族,  $n$  的取值必须从零开始. 当  $n=0$  时  $\cos \beta y = 1$ , 但  $\text{sh } \beta x, \beta \text{sh } \beta x, \beta \text{ch } \beta x$  均为零值, 为保证待定系数的完整性, 将  $n=0$  时的双曲函数改为  $x$  的多项式. 级数  $\sum_{m=1,3,5} \sin \alpha x$  符合  $x=0$  为支承边挠度为零,  $x=a$  为自由边挠度不为零的变形特点, 级数  $\sum_{n=0,1,2} \cos \beta y$  符合  $y=0$  和  $y=b$  均为自由边挠度不为零的变形特征.

特解  $W_2$  主要与荷载有关, 由于式 (1) 实质上是以挠度为参数表示的板法向力的平衡方程, 因此所有已知的法向力, 包括作用在板上的法向荷载, 自由边上的竖向剪力, 自由角点上的竖向集中力以及已知挠度, 即支承边上已知的竖向位移都应有相应的特解, 有

$$W_2=W_{21}+W_{22}+W_{23}+W_{24} \tag{4}$$

式中:  $W_{21}, W_{22}, W_{23}, W_{24}$  分别为支承边竖向位移、

自由角点竖向集中力、自由边界竖向剪力、板面法向荷载对应的特解. 它们必须服从以下规则:

(1)  $W_{21}, W_{22}, W_{23}$  要分别满足支承边挠度条件、自由角点集中力条件、自由边剪力分布条件. 相互之间不发生关联, 即  $W_{21}$  在自由角点对应的角点力为零值, 在自由边上对应的剪力为零值;  $W_{22}$  在支承力上挠度为零值, 在自由边上对应的剪力为零值;  $W_{23}$  在支承边上挠度为零值, 在自由角点上对应的角点力为零值.

(2)  $W_{24}$  在支承边上挠度为零值, 在自由角点上对应的角点力为零值, 在自由边上对应的剪力为零值.

(3)  $W_{21}, W_{22}, W_{23}, W_{24}$  组成的组合特解  $W_2$  要满足式 (1) 所示的平衡微分方程, 同时也可以满足支承边的挠度条件、自由角点作用力条件、自由边上剪力分布条件.

2.1 支承边竖向位移对应的  $W_{21}$

图 1 所示矩形板  $x=0$  为支承边, 边界上挠度是已知的. 现将边界上线性分布的挠度、抛物线分布的挠度表示成多项式, 其它形式的挠度表示成级数形式, 如  $x=0$  时

$$W=\Delta_0+\frac{(\Delta_1-\Delta_0)y}{b}+u_x(y^2-by)+S_{0x1}+\sum_{n=1,2} S_{nx} \cos \beta y \tag{5}$$

式中: 前两项为边界上线性分布的挠度, 第三项为二次抛物线分布挠度, 第 4 项和第 5 项为以级数形式表示的挠度, 其中  $S_{0x1}$  为  $n=0$  时的  $S_{nx1}$ , 则

$$W_{21}=\Delta_0+\frac{(\Delta_1-\Delta_0)y}{b}+u_x(y^2-by)+S_{0x1}+\sum_{n=1,2} \frac{S_{nx1}}{\text{ch } \beta a} \text{ch } \beta (a-x) \cos \beta y \tag{6}$$

当边界上有三次抛物线分布的挠度时, 即式 (5) 中  $u_x(y^2-by)$  为  $u_x(y^3-b^2y)$ , 为使  $W_{21}$  在自由边上对应的剪力为零值和自由角点上对应的角点力为零值, 要将式 (6) 中  $(y^2-by)$  改为  $(y^3-b^2y)-3y(x^2-2ax)/(2-\nu)$ , 当边界挠度为  $u_x(y^4-b^3y)$  时, 要改为  $(y^4-b^3y)-y^2(6x^2-12ax)/(2-\nu)$ . 当  $\nabla^4 W_{21} \neq 0$  时, 在确定  $W_{24}$  时要考虑这个因素.

2.2 自由角点集中力对应的  $W_{22}$

角点  $B, C$  为自由角点或柱支角点, 角点力可以是作用在角点上的外荷载, 也可以是位于角点的柱支座产生的支反力, 设角点力分别为  $R_B$  (方向向下为正值) 和  $R_C$  (方向向上为正值), 则

$$W_{22}=-\frac{1}{4(1-\nu)Db}.$$

$$\left\{ -R_{\text{d}}\left[ x\left( y^2-2by\right) -\frac{\left( 2-\mu\right) x^3}{3}\right] +R_{\text{d}}\left[ xy^2-\frac{\left( 2-\mu\right) x^3}{3}\right] \right\} \quad (7)$$

2.3 自由边剪力对应的  $W_{23}$

自由边上的剪力包括作用在边界上的外荷载,也包括位于边界上柱支座产生的柱支反力,在  $y=0$  边界上,剪力向上为正值,在  $y=b$  和  $x=a$  边界上剪力向下为正值,将已知的边界剪力表示成如下形式

$$\begin{cases} V_x=q_{xa}+R_{0x}2+\sum_{n=1,2}R_{nx}\cos\beta y, x=a \\ V_y=q_{y0}+\sum_{m=1,3,5}R_{my}\sin\alpha x, y=0 \\ V_y=q_{yb}+\sum_{m=1,3,5}R_{my}\sin\alpha x, y=b \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $q_{xa}, q_{y0}, q_{yb}$  分别为  $x=a, y=0, y=b$  边界上作用的均布剪力.其它形式剪力可表示成级数形式,其中  $R_{0x}$  为  $n=0$  时的  $R_{nx}$ ,则

$$\begin{aligned} W_{23} = & -\frac{q_{xa}x^3}{6D} + \frac{q_{y0}}{2Db} \frac{(x^2-2ax)(y^2-2by)}{2(2-\mu)} - \\ & -\frac{q_{yb}}{2Db} \frac{(x^2-2ax)y^2}{2(2-\mu)} - \frac{R_{0x}x^3}{6D} - \\ & -\frac{1}{D(\mu-1)} \sum_{n=1,2} \frac{S_{nx}2}{\beta_{\text{ch}}^3 \beta_{\text{d}}^3} \text{sh} \beta_{\text{d}} x \cos \beta y + \\ & -\frac{1}{D(\mu-1)} \sum_{m=1,3,5} \frac{1}{\alpha_{\text{sh}}^3 \phi} [R_{my} \text{ch} \alpha(b-y) - R_{my} \text{sh} \alpha y] \sin \alpha x \end{aligned} \quad (9)$$

对应边界上一次线性分布的剪力或抛物线分布的剪力,其特解也可以采用多项式形式,但要使  $W_{23}$  满足支承边挠度为零条件及在自由角点上对应的角点力为零值,表达式非常复杂,为简便起见,常将其表示成级数形式.当  $\nabla^4 W_{23} \neq 0$ ,在确定  $W_{24}$  时必须考虑这个情况.

2.4 板面法向力对应的  $W_{24}$

板面荷载包括作用在板上的分布荷载、局部分布荷载或集中力,也包括位于板内的柱支座产生的柱支反力,为使组合特解  $W_2$  满足式(1)所示的平衡微分方程,与特解  $W_{24}$  对应的  $q(x,y)$  为扣除  $\nabla^4 W_{21}$  和  $\nabla^4 W_{23}$  以后的荷载值,首先将荷载展成双重三角级数的形式,设

$$\begin{aligned} q(x,y) &= \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=0,1,2} T_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \\ &= \sum_{m=1,3,5} T_{m0} \sin \alpha x + \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,2} T_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \end{aligned} \quad (10)$$

则

$$\begin{aligned} W_{24} = & \sum_{m=1,3,5} \frac{T_{m0}}{D\alpha^4} \sin \alpha x + \\ & + \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,2} \frac{T_{mn}}{D(\alpha^2+\beta^2)} \sin \alpha x \cos \beta y \end{aligned} \quad (11)$$

当板面作用均布荷载或线性分布荷载时,

$W_{24}$  也可用多项式表示,如当  $q(x,y) = q$  时

$$W_{24} = \frac{q}{24D} (x^4 - 4ax^3) \quad (12)$$

利用四边的边界条件,可以建立以  $A_m, B_m, C_m, D_m, E_n(E_0), F_n(F_0), G_n(G_0), H_n(H_0)$  为未知量的线性方程组.方程左端是通解  $W_1$  中未知量的系数项,方程右端包括板的边界条件以及特解  $W_2$  对应的边界条件值.通解  $W_1$  中级数取项数越多,方程组系数矩阵阶数越大,但特解  $W_2$  中级数取项数与阶数无关,适当加大  $W_2$  中的级数取项数有利于计算精度的提高.

对图 1(a) 所示的悬臂板,利用上述方程组即可以求解;对图 1(c), (d), (e) 所示一边简支一柱支座支承的矩形板,在求解待定系数的线性方程组中,  $E_0$  所对应的系数项全为零,这是因为式(3)中,  $E_0 x$  代表板绕  $x=0$  边界的刚体转动,它与  $x=0$  边界的挠度条件及其它力的边界条件无关.这表示在这 8 组方程中一定有一个方程是多余的,从数学意义上讲,该系数项形成的  $N$  个  $N$  维向量一定是线性相关的,其系数矩阵的秩为  $N-1$ .为使方程有唯一解,必须删去一个多余方程.这个方程按下列方法选择:由于  $E_0$  是对应  $n=0$  时的系数,柱支反力计算已利用了对  $y$  轴弯矩平衡条件,因此应删去对应  $x=0$  边界弯矩条件建立的、且  $n=0$  时的方程,同时系数  $E_0$  由柱支座的挠度条件确定,即  $x=x_1, y=y_1$  时

$$W = \triangle_1 \quad (13)$$

式中:  $x_1, y_1$  为柱支座的坐标值;  $\triangle_1$  为柱支座处的挠度值,方向向下为正值.

3 逆向分析验证法

逆向分法验证法是首先假设板的挠度曲线(或相对挠曲线),逆向推算相应的荷载条件、边界条件,并计算柱支座支反力,然后用本文方法确定特解  $W_{21}, W_{22}, W_{23}, W_{24}$ , 引用边界条件和柱支座的挠度条件确定  $W_1$  中特定系数,最后将计算结果与理论值进行比较,从而可以比较真实地判断本方法的计算精度.对于图 1(a) 所示的悬臂板,

设板面挠度曲线为  $W = \frac{q}{3D} \left[ \frac{x^4}{24} + \frac{xy^2}{8} + \frac{y^4}{24} \right]$ .它对应板面荷载为均布荷载  $q$ ; 支承边  $x=0$  处  $W = \frac{qy^4}{72D}$ ; 自由角点处角点力为  $R_B = 0, R_C = -\frac{(1-\mu)}{3} qab$ ; 自由边上剪力为:  $x=a$  时  $V_x = -\frac{(4-\mu)}{6} qa, y=0$  时  $V_y = 0, y=b$  时  $V_y = -$

$$\frac{(4-\mu)}{6}qb \cdot \text{对应上述条件,有}$$
$$\begin{cases} W_{21} = \frac{qb^3}{72D} + \frac{q}{72D}[(y^4 - b^3y) - \frac{y^2}{2-\mu}(6x^2 - 12ax)] \\ W_{22} = \frac{qa}{12D}[xy^2 - \frac{(2-\mu)x^3}{3}] \\ W_{23} = \frac{(4-\mu)qax^3}{36D} + \frac{(4-\mu)q(x^2 - 2ax)y^2}{24D(2-\mu)} \\ W_{24} = \frac{q}{72D}(x^4 - 4ax^3) \end{cases} \quad (14)$$

式中:对应于  $W_{24}$  的  $q(x,y) = q - D\nabla^4 W_{21} - D\nabla^4 W_{23} = \frac{q}{3}$ . 引入相应的边界条件后,得  $W_1 = 0$ , 即  $W = W_{21} + W_{22} + W_{23} + W_{24} = \frac{q}{3D}[\frac{x^4}{24} + \frac{x^2y^2}{8} + \frac{y^4}{24}]$ , 与理论值完全相同. 对于图 1(c),(d),(e) 所示一边简支—柱支座支承的矩形板,设板的相对变形曲线  $W' = \frac{q}{3D}[\frac{x^4}{24} + \frac{x^2y^2}{8} + \frac{y^4}{24}]$ , 考虑柱支座处位移条件后,可得板实际的挠曲线. 反推该挠曲线对应的荷载条件、边界条件、角点力条件,并对  $x = 0$  轴取矩,得柱支反力  $R_1 = 0$ . 按本文方法计算时,特解  $W_{21}, W_{22}, W_{23}, W_{24}$  同式 (14), 代入边界条件后得  $W_1$  中除  $E_0$  外所有系数均为零值,再考虑柱支座处的位移条件得与理论解相同的结果. 该算例清楚表明,只有全面引入特解  $W_{21}, W_{22}, W_{23}, W_{24}$ , 才能得到如此精确的结果.

现再次采用逆向分析法,设板面挠度曲线 或相对变形曲线 为  $W = \frac{q}{D}a^2b^2\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{2b}$ , 它对应板面荷载为  $\frac{q\pi^4}{a^2b}(b^4 + \frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{a^4}{16})\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{2b}$ . 支承边  $x = 0$  的挠度  $W = 0$ . 自由角点处角点力  $R_B = (1-\mu)qab\pi^2, R_C = 0$ . 自由边上剪力为  $x = a$  时,  $V_x = -\frac{q\pi^3}{a}[b^2 + (2-\mu)\frac{a^2}{4}]\sin\frac{\pi y}{2b}; y = 0$  时,  $V_y = \frac{q\pi^3}{b}[\frac{a^2}{8} + (2-\mu)\frac{b^2}{2}]\sin\frac{\pi x}{a}; y = b$  时,  $V_y = 0$ .

对应上述条件有

$$\begin{cases} W_{21} = 0 \\ W_{22} = \frac{R_B}{4(1-\mu)D} [x(y^2 - 2by) - \frac{(2-\mu)x^3}{3}] \\ W_{23} = -\frac{R_{ax}x^3}{6D} - \frac{1}{D(\mu-1)} \sum_{n=1,2} \frac{R_{nx}}{\beta_{ch}^3 \beta_a} \text{sh } \beta_{ch} \cos \beta_y + \frac{1}{D(\mu-1)} \sum_{m=1,3,5} \frac{R_{mx}}{\alpha_{sh}^3 \alpha_b} \text{ch } \alpha(b-y) \sin \alpha \\ W_{24} = \sum_{m=1,3,5} \frac{T_{m0}}{D\alpha} \sin \alpha + \sum_{m=1,3,5} \sum_{n=1,2} \frac{T_{mn}}{D(\alpha^2 + \beta^2)} \sin \alpha \cos \beta \end{cases} \quad (15)$$

式中:

$$R_{0x} = -\frac{2q\pi^2}{a} [b^2 + (2-\mu)\frac{a^2}{4}];$$
$$R_{nx} = \frac{q\pi^4}{ab^2} [b^2 + (2-\mu)\frac{a^2}{4}] \left| \left[ \beta^2 - \left( \frac{\pi}{2b} \right)^2 \right] \right|;$$
$$R_{mx1} = -\frac{2q\pi^4}{a^2b} \left[ \frac{a^2}{8} + (2-\mu)\frac{b^2}{2} \right] \sin \frac{m\pi}{2} \left| \left[ \alpha^2 - \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \right] \right|;$$
$$T_{m0} = -\frac{4q\pi^4}{a^4b^2} \left[ b^4 + \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^4}{16} \right] \sin \frac{m\pi}{2} \left| \left[ \alpha^2 - \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \right] \right|;$$
$$T_{mn} = \frac{2q\pi^6}{a^4b^4} \left[ b^4 + \frac{a^2b^2}{2} + \frac{a^4}{16} \right] \sin \frac{m\pi}{2} \left| \left[ \alpha^2 - \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \right] \left| \left[ \beta^2 - \left( \frac{\pi}{2b} \right)^2 \right] \right| \right|.$$

该算例的特点是  $W_{23}$  及  $W_{24}$  要采用级数形式. 表 1 列出悬臂板的计算结果并与理论解的对比. 计算时取  $q = 1, D = 1, a = b = 1, \mu = 0.3$ . 通解  $W_1$  中级数取前 5 项, 特解级数取前 25 项, 与理论解相比, 前 4 位有效数字是基本相同的, 对于一边简支—柱支座支承的矩形板计算结果类同.

表 1 挠度及弯矩系数

计算点		本文值			理论值		
$x$	$y$	$W$	$M_x$	$M_y$	$W$	$M_x$	$M_y$
0.5	0	-0.000 02	-0.006 79	0.031 98	0	0	0
0.5	0.25	0.382 71	4.060 43	2.077 31	0.382 68	4.060 20	2.077 31
0.5	0.5	0.707 12	7.502 21	3.838 29	0.707 11	7.502 28	3.838 38
0.5	0.75	0.923 89	9.802 12	5.014 99	0.923 88	9.802 20	5.015 08
0.5	1.0	1.000 01	10.609 64	5.428 63	1.000 00	10.609 81	5.428 28
0.25	0.5	0.500 00	5.304 76	2.714 08	0.500 00	5.304 91	2.714 14
0.75	0.5	0.500 04	5.304 86	2.714 24	0.500 00	5.304 91	2.714 14

4 超静定弯曲

对图 1(b), (f) 所示的矩形板, 利用静力平衡条件无法确定柱支反力, 这些板的弯曲为超静定弯曲. 撤去多余的柱支座而代之以未知力, 得到一个静定弯曲的基本体系, 分别计算基本体系在原荷载和单位未知力作用下的弯曲, 由多余柱支座处的挠度条件求出未知力, 利用叠加法即可求解. 如图 1(f) 所示矩形板, 欲求角点  $O, A, B, C$  发生沉陷  $\Delta_O, \Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$ , 但  $OA$  边仍保持直线时的弯曲解, 可撤去  $C$  角点支座而代之以支反力  $R_C$  (方向向上为正). 基本体系仅考虑  $R_C = 1$  作用时, 由平衡条件得  $B$  角点柱支反力  $R_B = 1$  (方向向下为正). 由此确定  $W_{21} = 0, W_{22} = -\frac{xy}{2D(1-\mu)}$ ,  $W_{23} = 0, W_{24} = 0$ . 利用边界条件及角点  $B$  柱支座处挠度条件 (基本体系的  $\Delta_B = 0$ ), 得  $W_1 = 0$  即  $W = W_{22} = -\frac{xy}{2D(1-\mu)}$ . 再考虑当基本体系角点  $O, A, B$  发生沉陷  $\Delta_O, \Delta_A, \Delta_B$  且  $OA$  边仍保持直线时的弯曲, 有  $W_{21} = \Delta_O + \frac{(\Delta_A - \Delta_O)y}{b}, W_{22} = W_{23} = W_{24} = 0$ . 由边界条件得  $W_1$  中  $E_0$  以外其它系数均为零值, 并由  $B$  角点处柱支座挠度条件得  $E_0 = \frac{(\Delta_B - \Delta_O)}{a}$ , 即有  $W = \Delta_O + \frac{(\Delta_A - \Delta_O)y}{b}$

$+\frac{(\Delta_B - \Delta_O)x}{a}$ , 最后由  $C$  角点的位移条件得支反力  $R_C = -\frac{2D(1-\mu)}{ab}(\Delta_C + \Delta_O - \Delta_A - \Delta_B)$ . 由叠加法得原结构的弯曲解  $W = \Delta_O + \frac{(\Delta_A - \Delta_O)y}{b} + \frac{(\Delta_B - \Delta_O)x}{a} + \frac{(\Delta_C + \Delta_O - \Delta_A - \Delta_B)xy}{ab}$ , 与理论解完全相同.

参考文献:

[1] 许琪楼. 均布荷载作用下矩形悬臂板弯曲新解法[J]. 郑州工学院学报, 1996, 17(2): 42~27.  
[2] 许琪楼, 姬同庚. 一边固定一角点支承的矩形板在均布荷载作用下的弯曲解[J]. 应用数学和力学, 1996, 17(12): 1153~1163.  
[3] 许琪楼, 姬同庚. 一边简支一角点支承的矩形板弯曲[J]. 土木工程学报, 1997, 30(5): 76~79.  
[4] 许琪楼, 姬同庚. 一边简支二角点支承的矩形板弯曲[J]. 应用力学学报, 1997, 14(4): 56~63.  
[5] 许琪楼, 姜锐, 唐国明. 一边简支一角点或二角点支承的矩形板弯曲统一求解方法[J]. 郑州工业大学学报, 1998, 19(1): 52~59.  
[6] 许琪楼, 姜锐, 唐国明. 一边固定一角点或二角点支承的矩形板弯曲统一求解方法[J]. 计算力学学报, 1999, 16(2): 210~215.

Accurate Solution Method of Rectangular Plate Bending with One Supported Edge

XU Q 1, BAI Yang 1, WANG Hai 2

(1. College of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China; 2. Henan Provincial Water Conservancy Research Institute, Zhengzhou 450003, China)

**Abstract :** For the rectangular plate bending with a supported edge, the available method has such drawbacks to the different technique as low precision and small suitable region because of the variety of boundary condition. The accurate solution method in this paper divides the plate bending into the generalized statically determinate bending and indeterminate bending, and uses a unified expression of homogeneous solution and composite particular solution for the former. The particular solution can all together satisfy the governing differential equation, the deflection condition along the supported edge, the shear force condition along the free edge, the concentrated force condition at the column support, hence the plate bending can be solved directly by the boundary conditions of four edges and the displacement condition at column support. For the latter the superposition method can be used. The very method has the advantage of high precision and has proved by inverse analysis examples.

**Key words :** rectangular plate; elastic plate bending; accurate solution