文章编号:1671-6833(2003)03-0048-03

简支梁随机特征值的探讨

魏泽丽, 陈 淮

(郑州大学土木工程学院,河南 郑州 450002)

摘 要:根据具有不定参数的结构特征值Taylor 展开式,推导出特征值随机变化的统计特性(均值、方差)计算公式.以具有随机参数的简支梁为例,运用摄动Riccati 传递矩阵法,计算了简支梁在结构质量密度发生随机变化时结构特征值的统计特性,通过数值解和理论解的比较,验证该方法的适用性,利用该方法还计算了当简支梁截面抗弯刚度和长度分别发生随机变化时随机特征值的均值及方差,定量描述了具有随机参数的简支梁结构特征值的统计特性.

关键词:传递矩阵方法;随机参数;特征值;均值;方差

中图分类号:O 324 **文献标识码**:A

0 引言

对于具有确定性参数的任何复杂工程结构,可以使用ANSYS,SAP,ADINA 等大型通用结构分析程序进行结构动态分析,然而,由于工程结构的复杂性,构件制造、安装存在误差,工程材料本身具有随机特性,使得结构参数也具有随机性,这就导致结构振动的动态特性和动态响应也都具有随机性,因此,进行具有随机参数结构的随机动态特性的统计特性分析,具有一定的工程应用价值和学术价值.在具有随机参数结构的动力分析中,有Monte Carlo 数值模拟法、随机有限元法、随机摄动法和传递矩阵法等,对于一维结构,由于传递矩阵法只需要对一些矩阵阶次很低的传递矩阵进行连续的矩阵乘法运算,这大大节省了计算工作量和减少误差的积累,所以,该方法是进行快速灵敏度分析和重分析的有力工具[1],本文根据摄动Riccati 传递矩阵法,利用不定参数结构特征值的1阶和2阶摄动值,得到随机特征值的统计特征,文中具体以简支梁为例,求得了随机特征值的数值解.

1 摄动Riccati 传递矩阵法

Riccati 传递矩阵法是在Myklestad-Prohl 传递矩阵法的基础上,利用Riccati 矩阵变换得到2个相邻截面状态向量间的传递关系[1,2]:

$$\begin{Bmatrix} f \\ e \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f \\ e \end{Bmatrix}_i \tag{1}$$

引入Riccati 变换

$$\{f\}_i = [S]_i \{e\}_i \tag{2}$$

式中:$[S]_i$ 称为Riccati 传递矩阵.文献[1,2]中给出了Riccati 传递矩阵的递推关系式:

$$[S]_{i+1} = [u_{11}S_i + u_{12}]_i [u_{21}S_i + u_{22}]_i^{-1} \tag{3}$$

式中,$u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}$ 均为4×4阶子矩阵,其具体表达式见文献[1,2].

假定 ω_p 是一维不定参数结构的第p 阶特征值,$b_j(j=1,\cdots,m)$ 是一维不定参数结构的m个不定参数,可以表示为[2]

$$b_j = b_{j0}(1+\varepsilon_j),(j=1,\cdots,m) \tag{4}$$

式中:b_{j0} 是不定参数的均值;ε_j 是表征结构不确定性的小参数,且$|\varepsilon_j| \ll 1$.

结构特征值不确定性来自结构参数的不确定性,这种不确定性可以将不定参数结构的第p 阶特征值用Taylor 展开表示为

$$\omega_p = \omega_{p,0} + \sum_{j=1}^{m} \omega_{p,j}\varepsilon_j + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{j} \omega_{p,jk}\varepsilon_j\varepsilon_k \tag{5}$$

式中:$\omega_{p,0}$ 为$b_j=b_{j0}$ 时结构的特征值,即结构特征值 ω_p 的0阶摄动;$\omega_{p,j}$ 为由结构参数不定性所产生的结构特征值 ω_p 的1阶摄动;$\omega_{p,jk}$ 为由结构参数不定性所产生的结构特征值 ω_p 的2阶摄动.

为了应用方便,把式(5)改写为如下形式:

收稿日期:2003-03-10;修订日期:2003-05-28

基金项目:河南省高等学校创新人才基金资助项目;郑州大学科学基金资助项目

作者简介:魏泽丽(1978-),女,河南省郑州市人,郑州大学硕士研究生.

$$\omega_p = \omega_{p,0} + \sum_{j=1}^{m}\omega_{p,j}\varepsilon_j + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\hat{\omega}_{p,jk}\varepsilon_j\varepsilon_k \quad (6)$$

其中，$\omega_{p,jk}$ 与 $\hat{\omega}_{p,jk}$ 之间有如下关系：

$$\begin{cases} \hat{\omega}_{p,jk} = \hat{\omega}_{p,kj} = \dfrac{\omega_{p,jk}}{2}, (j = 2,\cdots,m; k = 1,\cdots,j-1) \\ \hat{\omega}_{p,jj} = \omega_{p,jj}, (j = k = 1,\cdots,m) \end{cases} \quad (7)$$

其它传递参数的摄动表达式可以类似写出[2]．

2　随机特征值的统计特性

在实际工程结构中，如果结构的参数具有随机性，则该结构是一个随机参数结构，其特征值是随机的，结构特征值的随机性来源于结构参数的随机性．由式(4)可以看出，由于 b_{j0} 是随机参数 b_j 的均值，可以推出小参数 ε_j 是具有零均值的随机变量，写成矩阵形式有

$$E\{\varepsilon\} = \{0\} \quad (8)$$

如果 $\varepsilon_j (j = 1,\cdots,m)$ 服从正态分布，由式(6)、(8)可以得到随机参数结构第 p 阶特征值的均值和方差为

$$E(\omega_p) = \omega_{p,0} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\hat{\omega}_{p,jk}E(\varepsilon_j\varepsilon_k) \quad (9)$$

$$D(\omega_p) = E[(\omega_p - E(\omega_p))]^2 = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\omega_{p,j}\omega_{p,k}E(\varepsilon_j\varepsilon_k) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\hat{\omega}_{p,jk}\hat{\omega}_{p,ls}[E(\varepsilon_j\varepsilon_s)E(\varepsilon_k\varepsilon_l) + E(\varepsilon_j\varepsilon_l)E(\varepsilon_k\varepsilon_s)] \quad (10)$$

本文计算公式可用于简支梁桥[3]的动态特性统计分析和概率损伤诊断．

3　数值算例

已知简支梁结构计算简图如图1所示，结构计算参数为[4]：质量密度 $\rho = 7800\,\mathrm{kg/m^3}$；长度 $L = 10\,\mathrm{m}$；弹性模量 $= 2.0\times10^{11}\,\mathrm{N/m^2}$；直径 $d = 0.2\,\mathrm{m}$．设简支梁的质量密度 ρ、截面抗弯刚度 EI、长度 L 为独立的随机变量，其标准差分别为 $\sigma_\rho = 156\,\mathrm{kg/m^3}$，$\sigma_{EI} = 6.22832\times10^5\,\mathrm{N\cdot m^2}$，$\sigma_L = 0.05\,\mathrm{m}$．

简支梁前4阶横向振动的固有频率分别为：$\omega_1 = 24.988\,\mathrm{rad/s}$，$\omega_2 = 99.953\,\mathrm{rad/s}$，$\omega_3 = 224.895\,\mathrm{rad/s}$，$\omega_4 = 399.813\,\mathrm{rad/s}$．

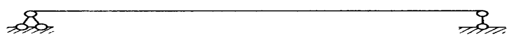

图1　简支梁

Fig．1　Simple supported beam

当简支梁仅质量密度为随机变量，其它参数为确定性参数时，特征值 ω 的方差理论解为[5]

$$\mathrm{Diag}\left[(\sigma_\omega^{(1)})^2,(\sigma_\omega^{(2)})^2,(\sigma_\omega^{(3)})^2,(\sigma_\omega^{(4)})^2\right] = \left|\frac{\pi^2\sigma_\rho}{2L^2\rho}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\right|^2\mathrm{Diag}(1,16,81,256) + \left|\frac{3\pi^2\sigma_\rho^2}{4L^2\rho^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\right|^2\mathrm{Diag}(1,16,81,256) \quad (11)$$

用摄动Riccati传递矩阵法计算得到的特征值的均值和方差列于表1．

表1　随机特征值理论解与计算解的比较

Tab．1　The comparison between the theoretical values and the numerical values of the stochastic eigenvalues

振型	特征值均值/(rad·s^{-1})	特征值方差理论解/(rad^2·s^{-2})	特征值方差数值解/(rad^2·s^{-2})	误差/%
1阶	24.9917	0.062496	0.0625	0.0064
2阶	99.9680	0.999959	0.9995	0.0460
3阶	224.9287	5.062330	5.0601	0.0441
4阶	399.8730	15.999400	15.9922	0.0449

从表1可以看出，用摄动Riccati传递矩阵法求解特征值 ω 的方差最大误差仅仅为0.046%，这说明本文所用公式正确，和文献[4]中计算结果的精度相比较，计算结果十分接近．

当简支梁的长度 L 为随机变量且 $\delta = 0.005$ 时，计算得出相应的特征值均值和方差列于表2；当截面抗弯刚度 EI 为随机变量且 δ 取不同值时，计算得出相应的特征值均值和方差如表3所示．

表2　简支梁随机特征值的统计特性

Tab．2　The statistics of stochastic eigenvalues of the simple supported beam

振型	特征值均值/(rad·s^{-1})	特征值方差数值解/(rad^2·s^{-2})
1阶	24.9899	0.0624
2阶	99.9605	0.9992
3阶	224.9119	5.0579
4阶	399.8430	15.9838

表3 简支梁随机特征值的统计特性

Tab.3 The statistics of stochastic eigenvalues of the simple supporteal beam

振型	特征值均值/(rad·s^{-1})		特征值方差/(rad^2·s^{-2})	
	$\delta=0.04$	$\delta=0.15$	$\delta=0.04$	$\delta=0.15$
1阶	24.983	24.917 7	0.249 83	3.522 3
2阶	99.933	99.671 9	0.996 82	56.671 9
3阶	224.850	224.262 6	20.230 56	285.235 3
4阶	399.733	398.689 1	63.913 50	901.131 1

从表1～3中的数据可以看出,对于特征值ω的均值,由于简支梁的质量密度ρ、截面抗弯刚度EI和长度L的随机性引起的结构参数变异系数分别小于0.04和0.005时,随机性对特征值的影响可以忽略不计,当结构参数的变异系数较大时,比如当截面抗弯刚度EI的变异系数为0.15时,随机性对特征值的影响必须考虑;对于特征值ω的标准差,梁质量密度ρ、长度L的影响较梁抗弯刚度EI的影响小.

4 结束语

本文主要探讨一维具有随机参数的结构随机特征值统计特性计算问题,通过摄动Riccati传递矩阵法,利用不定参数结构特征值的1阶和2阶摄动值,得到随机特征值的统计特征,以简支梁为例,求出了具有随机参数的简支梁的随机特征值ω在质量密度ρ为随机变量时对应的均值和方差,并与理论解相比较,验证了本文采用方法的正确性,本文计算结果可为验证其他计算随机特征值方法提供数据;文中还计算出了当简支梁的抗弯刚度EI和长度L分别为随机变量时特征值的均值和方差,根据计算得到的数据,可以看出随机参数对结构随机特征值的影响.

参考文献:

[1] 钟一谔,何衍宗,王 正,等.转子动力学[M].北京:清华大学出版社,1987.

[2] 刘保国.一维不定参数结构系统的摄动Riccati传递矩阵方法及其应用[D].重庆:重庆大学,2002.

[3] 禹丹江,陈 淮.桥梁损伤检测的曲率摸态方法探讨[J].郑州大学学报(工学版),2002,23(3):104～106.

[4] 刘春华,秦 权.桥梁结构固有频率的统计特征[J].中国公路学报,1997,10(4):49～54.

[5] 陈塑寰.随机参数结构的振动理论[M].长春:吉林科学技术出版社,1992.

Study on Stochastic Eigenvalues of a Simple Supported Beam

WEI Ze-li, CHEN Huai

(College of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: On the basis of Taylor's expansion of the eigenvalues with random parameters, the formulae of calculating the statistics (the mean value and the variance) are obtained. Using the perturbation Riccati transfer matrix method a simple supported beam is used as an example. When the mass density is stochastic, the statistics of eigenvalues obtained by the method given in this paper are compared with the theoretical values to verify the method presented in this paper. Then with the method, the mean value and variance of eigenvalues of the simple supported beam with stochastic anti-bending and calculation length are calculated respectively. The statistics of eigenvalues of a simple beam structure with random parameters are quantitively described.

Key words: transfer matrix method; random parameters; eigenvalue; mean value; variance