文章编号:1671－6833(2003)02－0090－03

判别 Halley 方法逼近零点的两个充分条件

周幼英[1], 王锦玲[2], 傅晓阳[3]

(1. 浙江大学数学系,浙江 杭州 310028;2. 郑州大学系统科学与数学系,河南 郑州 450052;3. 福建兴业银行,福建 福州 350003)

摘　要:利用单点信息的方法,研究了求解解析算子中方程零点的 Halley 方法,解决了从任意一点本身的信息出发,判断其为 Halley 方法的逼近零点的两个充分条件. 相对于 Smale 曾提出的对 Newton 方法 α 至多为 $3-2\sqrt{2}$,该方法对一般有理迭代都可实现.

关键词:算法;点估计;复杂

中图分类号:O 241　　　**文献标识码**:A

0　引言

Smale 在国际数学家大会的报告[1]中研究了 Newton 方法的连续复杂性,其中起关键作用的是用单点信息估计求解解析算子方程的 Newton 方法的收敛性态[2],这是自 Kantorovich 以来关于算法收敛性分析的又一成功范例. 这种方法对比较不同算法的收敛性态有着十分重要的意义[3,4]. 本文旨在 Smale 方法的基础上对 Halley 方法进行研究.

设 IE, IF 是 Banach 空间, f 是从 IE 到 IF 的解析算子,考虑用 Halley 迭代

$$x_{n+1}=H(x_n)^{2}=$$

$$x_n-\left[I-\frac{1}{2}Df(x_n)^{-1}D^2f(x_n)Df(x_n)^{-1}\cdot f(x_n)\right]^{-1}Df(x_n)^{-1}f(x_n) \qquad (1)$$

式中: $n=0,1,2,\cdots$.

求解方程

$$f(x)=0 \qquad (2)$$

按 Smale 的做法,定义 Halley 方法的逼近零点如下.

定义 1　称 x 是用 Halley 方法求解式(2)的一个逼近零点,如果 $x_n=H(x_{n-1})$, $x_0=x$ 对一切自然数有意义,并且存在正常数 $q<1$,使得

$$\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant q^{3^n-1}\|x_1-x_0\|$$

成立. 记 $\beta(x,f)=\|Df(x)^{-1}f(x)\|$;

$$\delta(x,f)=\left\|\left[I-\frac{1}{2}Df(x)^{-1}D^2f(x)Df(x)^{-1}\cdot f(x)\right]^{-1}Df(x)^{-1}f(x)\right\|;$$

$$\gamma(x,f)=\sup_{k>1}\left\|Df(x)^{-1}\frac{D^kf(x)}{k!}\right\|^{\frac{1}{k-1}};$$

$$\alpha(x,f)=\beta(x,f)\gamma(x,f);$$

$$w(x,f)=\delta(x,f)\gamma(x,f).$$

有时简记 $\beta(x,f)=\beta(\alpha)=\beta$,其余类似,若求逆不存在,则令相应的值为 $+\infty$.

定理 1　如果 $x\in$ IE 满足 $\alpha(x)<\alpha_0$, $\alpha_0\approx 0.16624$,那么 x 是逼近零点. 有

(1) $x_n=H(x_{n-1})$, $x_0=x$ 对一切自然数有意义;

(2) $\alpha(x_n)\leqslant q^{3^n-1}\alpha(x_0)$, $n=0,1,2\cdots$;

(3) $\|x_{n+1}-x_n\|\leqslant q^{3^n-1}\|x_1-x_0\|$, $n=0,1,2,\cdots$.

其中: $q=\sqrt{g\left(\frac{\alpha(x_0)}{1-\alpha(x_0)}\right)}<1$, $g(t)=2t^2/[2(1-t)^2-1]^2$.

定理 2　如果 $x\in$ IE 满足 $w(x)<b_0$, $b_0\approx 0.193\,89$,那么 x 是逼近零点,并且定理 1 中(1)和(3)成立,(2)相应为 $w(x_n)\leqslant q^{3^n-1}w(x_0)$, $x_0=x$, $n=0,1,2,\cdots$,其中 $q=\sqrt{h(w(x_0))}<1$, $h(t)=\left[1-\frac{2t^3}{\Psi(t)^2}\right]^{-1}\frac{2t^2}{\Psi(t)^2}$, $\Psi(t)=2t^2-4t+1$.

收稿日期:2003－02－20;**修订日期**:2003－03－29

作者简介:周幼英(1964－),女,浙江省诸暨市人,浙江大学讲师,硕士,主要从事数值分析方面的研究.

1　定理的证明

为了证明定理,先导出几个引理和性质.

引理1[1]　(1) 如果 $\alpha=\beta\gamma<1$,那么 $\delta\leqslant\beta/(1-\beta\gamma)$, $w\leqslant\alpha/(1-\alpha)$.

(2) 如果 $w=\delta\gamma<1$,那么 $\beta\leqslant\delta/(1-\delta\gamma)$, $\alpha\leqslant w/(1-w)$.

引理2[2]　设 $x',x\in E$,如果 $\|x'-x\|\gamma(x)<1-\frac{\sqrt{2}}{2}$,那么

(1) $Df(x')^{-1}$ 存在,并且有 $\|Df(x')^{-1}Df(x)\|<1/[2-\varphi'(\|x'-x\|\gamma(x))]$.

(2) $\gamma(x')\leqslant\gamma(x)/[2-\varphi'(\|x'-x\|\gamma(x))](1-\|x'-x\|\gamma(x))^3$.

其中 $\varphi(t)=1/(1-t)$, $\varphi'(t)=1/(1-t)^2$.

引理3　如果 $w(x)<1$, $x'=H(x)$,那么

(1) $\|Df(x)^{-1}f(x')\|\leqslant 2\delta(x)w(x)^2/(1-w(x))$.

(2) 如果又有 $\alpha(x)<1$,那么可得

$\|Df(x)^{-1}f(x')\|\leqslant 2\beta(x)w(x)^2/(1-w(x))=2\delta(x)\alpha(x)w(x)/(1-w(x))$.

证明:利用Taylor展开可得

$$Df(x)^{-1}f(x')=Df(x)^{-1}f(x)+(x'-x)+\frac{1}{2}Df(x)^{-1}D^2f(x)(x'-x)^2+\sum_{k=3}^{\infty}Df(x)^{-1}\frac{D^kf(x)}{k!}(x'-x)^k \tag{3}$$

将式(1)变形得

$$(x'-x)+Df(x)^{-1}f(x)=\frac{1}{2}Df(x)^{-1}D^2f(x)Df(x)^{-1}f(x)(x'-x) \tag{4}$$

把式(4)重复代入式(3),得

$$Df(x)^{-1}f(x')=\frac{1}{2}Df(x)^{-1}D^2f(x)-\frac{1}{2}Df(x)^{-1}D^2f(x)Df(x)^{-1}f(x)(x'-x)^2+\sum_{k=3}^{\infty}Df(x)^{-1}\frac{D^kf(x)}{k!}(x'-x)^k,$$

于是有

$$\|Df(x)^{-1}f(x')\|\leqslant\gamma(x)^2\beta(x)\delta(x)^2+\delta(x)\sum_{k=3}^{\infty}w(x)^{k-1}=w(x)^2\left(\beta(x)+\frac{\delta(x)}{1-w(x)}\right).$$

利用引理1可知,上式不大于 $2\delta(x)w(x)^2/(1-w(x))$,这就证明了结论(1),利用引理1可类似得到结论(2),证毕.

引理4　如果 $w(x)<1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x'=H(x)$,那么

(1) $\beta(x')<2\delta(x)w(x)^2(1-w(x))/\Psi(w(x))$;

(2) $\beta(x')<2\beta(x)w(x)^2(1-w(x))/\Psi(w(x))=2\delta(x)\alpha(x)w(x)(1-w(x))/\Psi(w(x))$,

其中:$\Psi(t)=(2-\varphi'(t))(1-t)^2=2t^2-4t+1$.

性质1　如果 $w(x)<1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $x'=H(x)$,那么

(1) $\alpha(x')<2w(x)^3/\Psi(w(x))^2$,

(2) $\alpha(x')<2\alpha(x)w(x)^2/\Psi(w(x))^2$.

引理5　设 $g(t)=2t^2/\Psi(t)^2$, $t\in[0,1-\frac{\sqrt{2}}{2}]$,则 $g(t)$ 在 $t\in[0,1-\frac{\sqrt{2}}{2})$ 严格单调上升,且 $g(0)=0$, $g(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=+\infty$. 又设 c_0 是 $g(t)=1$ 的最小正根,则 $0<c_0<1-\frac{\sqrt{2}}{2}$,并且当 $0\leqslant t\leqslant c_0$ 时, $0\leqslant g(t)\leqslant 1$.

性质2　如果 $\alpha(x)<\frac{3-\sqrt{2}}{7}$, $x'=H(x)$,那么 $\alpha(x')<2\alpha(x)\left[\frac{\alpha(x)}{1-\alpha(x)}\right]^2/\Psi\left(\frac{(x)}{1-\alpha(x)}\right)^2$.

性质3　如果 $0\leqslant e_n\leqslant Ae_{n-1}^3$,对任意自然数 n 成立,那么 $e_n\leqslant(\sqrt{A}e_0)^{3^n-1}e_0$.

下面来证明定理1.

由引理5知, $c_0<1-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $g(t_0)=1$,记 $\alpha_0=c_0/(1+c_0)$,当 $\alpha(x_0)<\alpha_0<\frac{3-\sqrt{2}}{7}\approx 0.297$,即 $\frac{\alpha(x_0)}{1-\alpha(x_0)}<c_0$,由性质2得: $\alpha(x_1)<q^2\alpha(x_0)<\alpha(x_0)<\frac{3-\sqrt{2}}{7}$,由性质2不难归纳得出 $\alpha(x_n)<\alpha_0<\frac{3-\sqrt{2}}{7}$,因此, $x_n=H(x_{n-1})$ 对一切自然数 n 都有意义.

注意到 $1/\Psi(t)^2$ 的单调性及性质2和性质3,容易得结论(2),并且 $q=\sqrt{g\left(\frac{\alpha(x_0)}{1-\alpha(x_0)}\right)}$.

最后证明(3).由 $\alpha(x_n)<\alpha_0$ 可得到 $w(x_n)<c_0<1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.重复应用引理1及引理4,再注意到某些单调性,可得

$$\delta(x_n)\leqslant\beta(x_n)/(1-\alpha(x_n))\leqslant\frac{\delta(x_{n-1})\cdot 2\alpha(x_{n-1})w(x_{n-1})(1-w(x_{n-1}))}{\Psi(w(x_{n-1}))(1-\alpha(x_n))}$$

$$\leqslant \frac{\delta(x_{n-1})\cdot 2\alpha(x_{n-1})^2}{\Psi(w(x_{n-1}))(1-\alpha(x_{n-1}))(1-\alpha(x_n))}$$

$$\leqslant \delta(x_{n-1})\frac{2\alpha(x_{n-1})^2}{\Psi(w(x_{n-1}))(1-\alpha(x_0))^2}.$$

利用结论(2)可得

$$\delta(x_n)\leqslant\delta(x_{n-1})(q^2)^{3^{n-1}}\cdot 2\left(\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\right)^2/$$

$$\Psi\left(\frac{\alpha_0}{1-\alpha_0}\right)^2=(q^2)^{3^n-1}\delta(x_{n-1}).$$

在证明过程中,我们利用了 $0=\Psi(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\leqslant\Psi(w(x_{n-1}))\leqslant\Psi(0)=1$,由此可得 $\delta(x_n)\leqslant q^{3^n-1}\cdot\delta(x_0)$,从而完成定理1的证明.

为证明定理2,再引入性质4.

性质4 如果 $w(x)<c_0$,$x'=H(x)$,那么

(1) $\delta(x)<[1-\frac{2w(x)^3}{\Psi(w(x))^2}]^{-1}\cdot\frac{2w(x)^2(1-w(x))}{\Psi(w(x))}\cdot\delta(x)$;

(2) $w(x')<[1-\frac{2w(x)^3}{\Psi(w(x))^2}]^{-1}\cdot\frac{2w(x)^3}{\Psi(w(x))^2}$.

引理6 设 $h(t)=(1-\frac{2t^3}{\Psi(t)^2})^{-1}\cdot\frac{2t^2}{\Psi(t)^2}$,则 $h(t)$ 在 $t\in[0,c_0]$ 上严格单调上升且 $h(0)=0$,$h(c_0)>1$.设 b_0 是 $h(t)=1$ 的最小正实根,则 $0<b_0<c_0$ 且当 $t\in[0,b_0]$ 时,$0\leqslant h(t)\leqslant 1$.

利用以上两个结论,类似于定理1的证法,同样可得定理2.

2 结论

(1) 数值 a_0,b_0 的近似值是通过计算机求得的.Smale 曾指出对Newton 方法 α 至多为 $3-2\sqrt{2}\approx 0.171\,57$,而本文的结论对一般有理迭代都可实现.

(2) 与本文定理1、定理2相应的Kantorovich 型结果,虽然在文献[5]、[6]和[7]中已求得,但与这些结果相比,利用单点信息的方法更为明快简洁.

参考文献:

[1] SMALE S. Algorithms for solving equations[R]. New York: International Congress of Mathematics, 1986. 1~44.

[2] SMALE S. Newton's method estimates from data at one point[R]. Laramie: Proceedings of a Conference in Honor of Gail Young, 1986. 1~16.

[3] 傅晓阳. Hansen & Patrick 方法的点估计[J]. 计算数学, 1990, (4): 52~59.

[4] 傅晓阳. Chebycheff 方法的点估计[J]. 应用数学与计算数学学报, 1990, 4(2): 43~50.

[5] 傅晓阳, 周幼英. Euler 族算法的一般收敛性[J]. 应用数学学报, 1994, 17(4): 599-568.

[6] HE W, PRABHV N. A globally convergent method for finding zeros of smooth functions[J]. Applied Mathematics and Computations, 2002, 133: 327~335.

[7] 萨列霍夫 ΓC, 梅尔特维佐娃 M A. 论某些迭代过程的收敛性[J]. 数学进展, 1957, (6): 352~359.

Two Sufficient Conditions of Examinning Approximate Zeros on Halley's Method

Zhou You-ying[1], Wang Jin-ling[2], Fu Xiao-yang[3]

(1. Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310028, China; 2. Department of System Science & Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China; 3. Information Science Department of Fujian Industrial Bank, Fuzhou 350003, China)

Abstract: In this paper the Halley's method for solving analytic operator equations from data at one point is studied. Two sufficient of examinning approximate zeros from data at one point itself is obtained. Particularly, Smale once suggested that α should be less than $3-2\sqrt{2}$ by Newton method and the method in this paper can be applied to rational iteation in general.

Key words: algorithm; point estimated; complexity