文章编号:1671-6833(2003)02-0087-03

群$L(3,2)$的$GF(2)$模分解

曹清录[1], 周世国[2]

(1. 中国人民解放军信息工程大学电子技术学院,河南 郑州 450004; 2. 郑州大学系统科学与数学系 河南 郑州 450052)

摘　要:由于$G=L(3,2)\cong SL(3,2)$,所以$L(3,2)$中的元素可表示成$GF(2)$上的三阶矩阵.采用基本群论和矩阵的一些方法,讨论了群$L(3,2)$的$GF(2)$模分解,特别地,对于$L(3,2)$的$GF(2)$模的可分解性进行研究.考察了$L(3,2)$的$GF(2)$模可分解成不可约模的直和,若V为G的非凡模且$t\in G, o(t)=2$能使$|V/C_v(t)|=2$,则$V=V_1\oplus V_0$,其中V_1为G自然模,$V_0=C_V(G)$;若$V/C_V(G)$为G自然模,则$V=\bar{A}\oplus V_0$,其中$\bar{A}$为G不可约模,$\bar{V}/C_V(G)$为G自然模,且$|C_V(G)|\leqslant 2$, $V_0\leqslant C_V(G)$.这些结论可用于Aamalgam问题的讨论,所使用的方法可以用于更为复杂的有限群的讨论.

关键词:自然模;不可约模;对偶模

中图分类号:O 152.1　　**文献标识码**:A

1　引理及命题

首先给出引理和命题,本文中所采用的符号,除特别说明外均同文献[1],以下令$G=L(3,2)$, V是G的$GF(2)$模.

引理1[2]　令

$$X=\left\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 \\ a_5 & a_6 & 1 \end{bmatrix}\in G \mid a_i\in GF(2), 1\leqslant i\leqslant 6\right\},$$

$$Y=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \end{bmatrix}\in G \mid b_j\in GF(2), 1\leqslant j\leqslant 6\right\},$$

则$X\cong Y\cong S_4$,且

$$S=X\cap Y=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \mid a,b,c\in GF(2)\right\}\in Syl_2(G).$$

引理2　①G可由三个对合生成;②G可由一个7阶元与一个对合生成.

引理3　①G中任意4阶子群在G中的正规化子同构于S_4;②G中任意4阶子群同它的G中共轭生成一个同构于S_4的子群.

证明:(1)显然$S=X\cap Y\in Syl_2(G)$, $S=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \mid a,b,c\in GF(2)\right\}$, S中包含两个4阶子群:

$$T=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix} \mid b,c\in GF(2)\right\},$$

$$W=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a,b\in GF(2)\right\}.$$

直接计算表明:$N_G(T)=X$, $N_G(W)=Y$.由Sylow定理可知,G中任意4阶子群必共轭于T或W,这就证明了①.

(2)由①可知$|T^G|=7$, $|W^G|=7$, T在X中的任意共轭与T生成X,又$|T^X|=3$,取Y中3阶元d,则$T^d=T$,易知$|T^x\cup T^{X^d}\cup T^{d^{-1}}|=|T^G|$,故②成立.

定义[3]　①V是G的自然模,设$|V|=2^3$;②X, Y如引理1中所定义,V_1, V_2是相互同构的G自然模,设

$|C_{V_1}(X)|=|C_{V_2}(X)|$,且$|C_{V_1}(Y)|=|C_{V_2}(Y)|$.

引理4　V为G的不可约模,则下列之一成立:

(1) V为G的平凡模,$|V|=2$;

收稿日期:2003-01-13;**修订日期**:2003-02-26

作者简介:曹清录(1964-),男,河南省淮阳县人,信息工程大学讲师,硕士,主要从事群论方面的研究.

(2) $|V|=2^3$, V 为 G 的两个互相对偶的自然模之一;

(3) $|V|=2^8$, $C_V(X)=C_V(Y)=1$. 这时 V 同构于上 $GF(2)$ 上 8 维李代数, $V\cong SL(3,2)=\left\{\begin{bmatrix}0 & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & 0 & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & 0\end{bmatrix} \middle| x_{ij}\in GF(2), (1\leqslant i, j\leqslant 3)\right\}$,

G 通过共轭作用在 $SL(3,2)$ 上, 由此可知, 李代数 $SL(3,2)$ 为射影 $GF(2)$ 模, 且 $SL(3,2)$ 与它的对偶模同构.

注意 在 $L((3,2)$ 中恰有一个 3 阶元共轭类, 2 个 7 阶元共轭类, 即有 4 个 2 阶正则元共轭类, 这表明引理 4 所列举的正是 $L(3,2)$ 的全部不可约 $GF(2)$ 模.

引理 5[4] V 为 G 的自然模, S, X, Y 分别如引理 1, W, T 如引理 3 中所定义, 则

(1) $|C_V(t)|=2^3$, $\forall t\in G$, $o(t)=2$, $|C_V(S)|=2$;

(2) $|C_V(X)|=1\neq|C_V(Y)|$, $|C_V(Y)|=2$, $|C_V(T)=2^2$, $|C_V(W)|=2$;

(3) 设 $d\in G$, $o(d)=3$, 则 $|C_V(d)|=2$.

引理 6 ① G 中 2 阶元互相共轭; ② G 中 3 阶元互相共轭; ③ G 中有两个子群同构于 S_4; ④设 $f\in G$ 且 $o(f)=7$, 则 $|N_G(f)|=21$; ⑤ G 中任意 2 阶元都包含在一个 7 阶元正规化子群中.

2 模分解及主要结论

以下证明关于 $L(3,2)$ 的 $GF(2)$ 模分解及主要结论.

定理 1 ①若 V 为 G 的非平凡模且 $t\in G$, $o(t)=2$ 能使 $|V/C_V(t)|=2$, 则 $V=V_1\oplus V_0$, 其中 V_1 为 G 自然模, $V_0=C_V(G)$; ②若 V 为 G 的非平凡模且 $S\in Syl_2(G)$ 能使 $|V/C_V(S)|=4$, 则 $V=V_1\oplus V_0$, 其中 V_1 为 G 自然模, $V_0=C_V(G)$.

证明: (1) 由假定 $|V/C_V(t)|=2$, $t\in G$, $o(t)=2$ 及引理 2 知, G 可由 t 在 G 中的三个对合生成, 故 $|V/C_V(G)|\leqslant 2^3$.

若 $|V/C_V(G)|<2^3$, 则 G 在 $V/C_V(G)$ 上平凡作用, 特别地, 对于 $f\in G$, $o(f)=7$, f 在 $V/C_V(G)$ 上平凡作用, 故 $[V,f,f]\leqslant[C_V(G),f]=1$, 即 $[V,f]=1$, 从而 f 在 V 上平凡作用, 由此可知 G 在 V 上平凡作用, 矛盾, 因此 $|V/C_V(G)|=2^3$. 且 $V/C_V(G)$ 为 G 的非平凡模, 则由引理 4 知, $V/C_V(G)$ 为 G 自然模.

令 $s\in G$, $o(t)=2$, $o(st)=3$, 设 $d=st$, 由此可知 s 与 t 在 G 中共轭, 故 $|V/C_V(S)|=2$, $C_V(d)=C_V(S)\cap C_V(t)$, 由此可得 $V=[V,d]\oplus C_V(d)$, 根据引理 1, 不失一般性, 可假定 $d\in N_G(\langle f\rangle)=N$, 则 $C_V(N)\leqslant C_V(d)$, $C_V(G)\leqslant C_V(N)$, $V=[V,N]\oplus C_V(N)$, $C_V(N)\leqslant C_V(d)$, $C_V(G)\leqslant C_V(N)$, $V=[V,N]\oplus C_V(N)$. 记 $\bar V=[V,N][V,d]=[\bar V,d]$, 又因 $\bar V=C_V(d)\oplus[\bar V,d]$, $C_V(d)\leqslant C_V(d)\leqslant C_V(t)$, 所以 t 作用在 $\bar V$ 上, 而 N 又作用在 $\bar V$ 上, 故 $\bar V$ 为 $\langle N,t\rangle=G$ 是不变的. 又因 $\dim\bar V=\dim V/C_V(N)\leqslant\dim C_V(G)=3$, 故 $\bar V$ 为 G 的自然模, 从而 $C_V(N)=C_V(G)$, 记 $V_0=C_V(G)$, $V_1=\bar V$, 则定理成立.

(2) 令 $t\in S$, $o(t)=2$, 若 $|V/C_V(t)|=2$, 则由①知结论②成立.

现假定 $|V/C_V(t)|=4$, 则对任意 2 阶元 $s\in S$, 均有 $|V/C_V(s)|=4$, 即 $C_V(S)=C_V(S)$. 设 M 为 G 的包含 S 且同构于 S_4 的子群, 则 $N=O_2(M)\leqslant S$, 从而由以上讨论知 $C_V(S)=C_V(N)$. 令 $S\neq T\in Syl_2(M)$, 显然 $N\leqslant T$, 由于 T 和 S 在 G 中共轭, 故 $|V/C_V(T)|=4$, 又 $C_V(T)\leqslant C_V(N)$, 则 $C_V(T)=C_V(N)=C_V(S)$. 由此可得 $C_V(S)=C_V(\langle S,T\rangle)=C_V(M)$. 令 $d\in M$, $o(d)=3$, 则 $C_V(d)=C_V(S)$, 否则 $C_V(d)=V$. 这是因为 $C_V(M)=C_V(S)$, $C_V(M)\prec C_V(d)$, 所以 $|V/C_V(d)|\prec 4$, 即 $|V/C_V(d)|=2$, 故 $[V,d,d]\leqslant[C_V(d),d]=1$, 从而 $[V,d]=1$, 即 $C_V(d)=V$, 矛盾, 故 $V=[V,d]\oplus C_V(d)$, 其中 $|[V,d]|=4$, M 中有 2 阶元 e 正规化 $\langle d\rangle$, 则 e 分别作用在 $[V,d]$ 和 $C_V(d)$ 上, 由于 $C_V(d)=C_V(S)=C_V(M)\leqslant C_V(M)\leqslant C_V(e)$, $|[V,d]|\leqslant|C_{[V,d]}(e)|^2$, 那么 $|[V,d]/C_{[V,d]}(e)|\leqslant 2$, 又由于 $|V/C_V(e)|=|[V,e]|$, $|[V,d]/C_{[V,d]}(e)|=|[V,d,e]|$ 且 $|[V,e]|=|[V,d,e]|$, 故 $|V/C_V(e)|\leqslant 2$ 则与假设矛盾, 故结论(2)成立.

定理 2 若 $V/C_V(G)$ 为 G 自然模, 则 $V=\bar V\oplus V_0$, 其中 $\bar V$ 为的 G 不可约模, $\bar V/C_{\bar V}(G)$ 为 G 的自然模, 且 $|G_{\bar V}(G)|\leqslant 2$, $V_0\leqslant C_V(G)$.

证明: 令 $H=N_G(T_7)$, 其中 $T_7\in Syl_7(G)$. 由引理 6 可知 $H=T_7\times\langle d\rangle$, $o(d)=3$, 由 Maschke 定理知, $V=[V,H]\oplus C_V(H)$, 显然 $C_V(G)\leqslant C_V(H)$, 故 $\dim[V,H]=\dim V/C_V(H)\leqslant\dim V/C_V(G)=3$.

若 $\dim[V,H]\leqslant 2$，若 T_7 平凡作用在 $[V,H]$ 上，便有 $[V,T_7,T_7]\leqslant[C_V(H),T_7]=1$，则 $[V,T_7]=1$，矛盾．故 $\dim[V,H]=3$ 且 $C_V(H)=C_V(G)$．记 $V_1=[V,H]$，则 $V_1=[V_1,H]\oplus C_{V_1}(d)$，显然 $[V,d]=[V_1,d]$．由 G 的结构可知 $t\in N_G(\langle d\rangle)$，$o(t)=2$，则 t 作用在 $[V_1,d]$ 上，$\dim C_{V_1}(d)=1$．记 $\langle u_1\rangle=C_{V_1}(d)$，若 $u=u^t$，则 $\bar{V}=[V_1,H]$ 为 t 不变的，即 G 是不变的，$V=\bar{V}\oplus C_V(G)$，故其中 $\bar{V}$ 为 G 的自然模，记 $V_0=C_V(G)$，则定理成立．

若 $u\neq u^t$，令 $U=\langle u,u^t\rangle$，则存在 $0\neq w\in U\cap C_V(G)$，从而 $U=\langle u\rangle\oplus\langle w\rangle$，记 $\bar{V}=\langle V_1,w\rangle$，则 $\bar{V}$ 为 $\langle H,t\rangle=G$ 是不变的．令 V_0 为 $\langle w\rangle$ 在 $C_V(G)$ 中的补，则 $V=\bar{V}\oplus V_0$，$\bar{V}$ 为 G 的不可约模且 $\bar{V}/C_{\bar{V}}(G)$ 为 G 的自然模，$|C_{\bar{V}}(G)|=2$．

参考文献：

[1] 王萼芳．有限群论基础[M]．北京：北京大学出版社，1986．

[2] 曹清录．群 $L(3,2)$ 的 $GF(2)$ 自然模[J]．河南科学，2001，19(4)：348～349．

[3] 徐明耀．有限群导引(上册)[M]．北京：科学技术出版社，1987．

[4] 曹清录，贾利新．再论群 $L(3,2)$ 的 $GF(2)$ 模结构[J]．河南科学，2001，19(2)：118～200．

The Decomposability of $L(3,2)$ Over $GF(2)$ Modules

CAO Qing-lu[1], ZHOU Shi-guo[2]

(1.Institute of Electronic Technology, The PLA University of Information Enginering, Zhengzhou 450004, China; 2.Department of System Science & Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450052, China)

Abstract: By means of the group theroy and matrix theory, $L(3,2)$ is regarted as matrix of three rank over $GF(2)$ because of $G=L(3,2)\cong SL(3,2)$. This paper deals with the module $L(3,2)$ over $GF(2)$. The decomposability of $L(3,2)$ over $GF(2)$ modules is investigated in detail. If $t\in G$, $o(t)=2$ and $|V/C_v(t)|=2$, then $V=V_1\oplus V_0$, $V_0=C_v(G)$. If $V/C_V(G)$ is G natural module, then $V=\bar{A}\oplus V_0$, ($\bar{A}$ is G irreducible module, $\bar{V}/C_{\bar{V}}(G)$ is G natural module, and $|C_{\bar{V}}(G)|\leqslant 2$, $V_0\leqslant C_V(G)$. These results can be applied to the discussion of amalgam problem. The methods in this paper can be made use of in the discussion of module of finite groups.

Key words: natural module; irreducible module; dual module