

文章编号:1671-6833(2003)01-0005-06

三边支承一边自由矩形板自由振动分析

许琪楼¹, 许 蕾²

(1. 郑州大学土木工程学院, 河南 郑州 450002; 2. 北京国电华北电力工程有限公司, 北京 100043)

摘 要: 板自由振动振形必须具有正交性, 采用主振方向排序法建立三边支承一边自由矩形板振形函数表达式可以满足振动微分方程和全部边界条件, 又具有振形的正交性. 该振形曲线中的振动波形数在主振方向上是唯一的, 在另一方向上是不唯一的, 振形曲线形状符合板边界条件所能限定的变形形态. 通过证明振形正交性的存在, 分析振形函数表达式的结构形式, 推导不同边界条件矩形板的频率方程, 计算板的自振频率及相应振形, 并与前人的结果进行了比较, 从理论上说明了该方法的正确性.

关键词: 弹性薄板; 自由振动; 振形正交性

中图分类号: TU 311.1 **文献标识码:** A

0 引言

板自由振动的振形必须具有正交性, 这表示在振动过程中振形的能量是守恒的, 才能采用振形分解法分析板在某一初始条件下振动过程. 虽然板的自由振动研究已经历数百年并提出很多解法, 但现有的各种解法或者不满足振动微分方程, 或者不满足全部边界条件, 或者二者均不满足. 上世纪 80 年代, D. J. Corman 教授提出叠加法, 并分析了几乎所有边界条件矩形板的自由振动, 这种解法所提出的振形表达式虽然可以同时满足振动微分方程及所有的边界条件, 但除一对边简支矩形板外都不具有正交性, 因此也不是真正的理论解^[1].

由于振形是正交的, 振形的排列肯定是有序的, 主振方向排序法就是试图揭露这种排序的规律性, 以便建立精确的振形函数表达式. 这种表达式应该满足振动微分方程和全部边界条件, 并具有振形的正交性. 本文就三边支承一边自由矩形板的动力分析进行讨论.

1 主振方向及相应的振形函数表达式

板横向自由振动的微分方程为

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \gamma^4 W = 0 \quad (1)$$

式中:

$$\gamma^4 = \omega^2 \frac{\bar{m}}{D} \quad (2)$$

W 为自平衡位置算起的振形函数; ω 为板自由振动的圆频率; \bar{m} 为板单位面积的质量; D 为板的弯曲刚度.

图 1 所示为三边支承(简支或固定)一边自由的矩形板. 在 x 轴方向上, $x=0$ 和 $x=a$ 均为支承边, 振动过程中边界上位移均为零, 应采用 $\sin \frac{m\pi x}{a}$ ($m=1, 2, 3, \dots$) 振动波形. 在 y 轴方向上, $y=0$ 为支承边, $y=b$ 为自由边, 应采用 $\sin \frac{n\pi y}{2b}$ ($n=1, 3, 5, \dots$) 波形. 为了保证振形的正交性和满足全部边界条件, 振形函数表达式中的振动波形数应按下列方法确定: 在二个振动方向上任选一个振动主方向, 主振方向的波形数是唯一的, 在另一方向上波形数又不是唯一的. 当取 x 轴方向为主振方向时, 对应第 m 个主振波形 $\sin \frac{m\pi x}{a}$, 考虑 $m < \frac{\gamma b}{\pi}$, 则满足振动微分方程的振形函数表达式为

$$W = (A_n \sinh \alpha_{1y} + B_n \cosh \alpha_{1y} + C_n \sin \alpha_{2y} + D_n \cos \alpha_{2y}) \sin \alpha x + \sum_{n < \frac{\gamma b}{\pi}} (E_n \sinh \beta_{1x} + F_n \cosh \beta_{1x} + G_n \sin \beta_{2x} +$$

收稿日期: 2002-11-02; 修订日期: 2002-12-21

基金项目: 河南省教育厅自然科学基金资助项目(2000430009).

作者简介: 许琪楼(1944-), 男, 山西省长治县人, 郑州大学教授, 硕士, 主要从事钢结构及工程弹性力学方面的研究.

$$H_n \cos \beta_{2x}) \sin \beta_y + \sum_{n > \frac{2b}{\pi}} (E_n \operatorname{sh} \beta_{1x} + F_n \operatorname{ch} \beta_{1x} + G_n \operatorname{sh} \beta_{3x} + H_n \operatorname{ch} \beta_{3x}) \sin \beta_y \quad (3)$$

式中: $\alpha = \frac{m\pi}{a}$, $\alpha_1 = \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2}$, $\alpha_2 = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$,

$$m=1,2,3,\dots$$

$$\beta = \frac{n\pi}{2b}, \beta_1 = \sqrt{\gamma^2 + \beta^2}, \beta_2 = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}, \beta_3 = \sqrt{\beta^2 - \gamma^2}, n=1,3,5,\dots$$

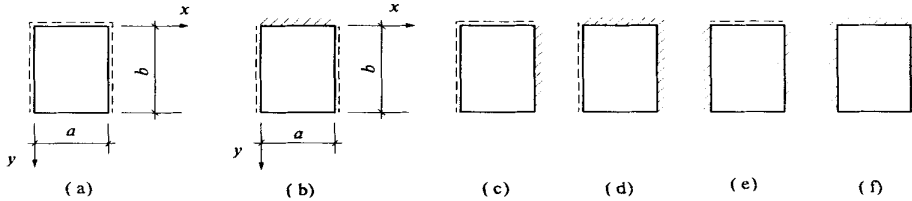


图1 三边支承一边自由的矩形板

Fig.1 Plates with three edges supported and one edge free

为了保证该主振形具有非零解,待定系数 A_m, B_m, C_m, D_m 不能全为零.该振形曲线形状切合板边界条件所限定的变形形态,相应的三角级数分别在 $[0, a]$ 和 $[0, b]$ 区间上具有正交性.

式(3)中包含有8个待定系数,由板的8个边界条件及级数的正交性可以建立以 $A_m, B_m, C_m, D_m, E_n, F_n, G_n, H_n$ 为未知量的8个线性方程,通过代数变换可得仅包含 A_m, B_m, C_m, D_m 为未知量的4个齐次线性方程.由 A_m, B_m, C_m, D_m 不能全为零的条件建立频率方程,由此解出 x 方向第 m 个主振形对应的各阶自振频率及相应的振形曲线,分别取 $m=1,2,3,\dots$ 即得以 x 方向为主振方向排序的所有振形.

当取 y 轴方向为主振方向时,对应 y 方向第 N 个主振形 ($N=1,2,3,\dots$),相应的振动主波形为 $\sin \frac{n\pi y}{2b}$, ($n=1,3,5,\dots$),即 $N = \frac{(n+1)}{2}$,则满足振动微分方程的振形函数表达式有二种可能的形式.

当 $n < \frac{2b}{\pi}$ 时:

$$W = (E_n \operatorname{sh} \beta_{1x} + F_n \operatorname{ch} \beta_{1x} + G_n \sin \beta_{2x} + H_n \cos \beta_{2x}) \sin \beta_y + \sum_{m < \frac{2b}{\pi}} (A_m \operatorname{sh} \alpha_{1y} + B_m \operatorname{ch} \alpha_{1y} + C_m \sin \alpha_{2y} + D_m \cos \alpha_{2y}) \sin \alpha_x + \sum_{m > \frac{2b}{\pi}} (A_m \operatorname{sh} \alpha_{1y} + B_m \operatorname{ch} \alpha_{1y} + C_m \operatorname{sh} \alpha_{3y} + D_m \operatorname{ch} \alpha_{3y}) \sin \alpha_x \quad (4)$$

式中: $\alpha_3 = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$,为保证主振形具有非零解, E_n, F_n, G_n, H_n 不能全为零.

当 $n > \frac{2b}{\pi}$ 时:

$$W = (E_n \operatorname{sh} \beta_{1x} + F_n \operatorname{ch} \beta_{1x} + G_n \operatorname{sh} \beta_{3x} + H_n \operatorname{ch} \beta_{3x}) \sin \beta_y + \sum_{m < \frac{2b}{\pi}} (A_m \operatorname{sh} \alpha_{1y} + B_m \operatorname{ch} \alpha_{1y} + C_m \sin \alpha_{2y} + D_m \cos \alpha_{2y}) \sin \alpha_x + \sum_{m > \frac{2b}{\pi}} (A_m \operatorname{sh} \alpha_{1y} + B_m \operatorname{ch} \alpha_{1y} + C_m \operatorname{sh} \alpha_{3y} + D_m \operatorname{ch} \alpha_{3y}) \sin \alpha_x \quad (5)$$

2 振形曲线的正交性

现以 x 方向为主振方向为例,将式(3)简写为

$$W = Y_1 X_1 + \sum_{n < N} X_2 Y_2 + \sum_{n > N} X_3 Y_2 \quad (6)$$

现分别考虑第 i 振形及第 j 振形,对应的主振波形分别为 $X_{i1} = \sin \frac{m_i \pi x}{a}$ 和 $X_{j1} = \sin \frac{m_j \pi x}{a}$,相应的振形常数分别为 γ_i 和 γ_j . m_i 和 m_j 可能相等,也可能是取不同值.

$$W_i = Y_{i1} X_{i1} + \sum_{n < N_i} X_{i2} Y_2 + \sum_{n > N_i} X_{i3} Y_2 \quad (7)$$

$$W_j = Y_{j1} X_{j1} + \sum_{n < N_j} X_{j2} Y_2 + \sum_{n > N_j} X_{j3} Y_2 \quad (8)$$

式中: $N_i = \frac{2\gamma_i b}{\pi}$, $N_j = \frac{2\gamma_j b}{\pi}$. 现设 $N_i < N_j$,由振动微分方程有

$$\frac{\partial^4 W_i}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W_i}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W_i}{\partial y^4} = \gamma_i^4 W_i \quad (9)$$

$$\frac{\partial^4 W_j}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W_j}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W_j}{\partial y^4} = \gamma_j^4 W_j \quad (10)$$

式(9)乘 W_j ,式(10)乘 W_i ,并将这些乘积在整个板范围内积分,有

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^4 W_i}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W_i}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W_i}{\partial y^4} \right) W_j dx dy = \gamma_i^4 \int_0^a \int_0^b W_i W_j dx dy \quad (11)$$

$$\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^4 W_i}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W_i}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W_i}{\partial y^4} \right) W_i dx dy = \gamma_j^4 \int_0^a \int_0^b W_j W_i dx dy \tag{12}$$

式(11)减式(12),并考虑由 $x=0, x=a, y=0$ 时, $W=0$ 的边界条件及三角函数的性质所得到的下列等式.

$$\begin{aligned} &x=0 \text{ 和 } x=a \text{ 时:} \\ &\begin{cases} X_{i1}=0, X_{i2}=0, X_{i3}=0, X''_{i1}=0 \\ X_{j1}=0, X_{j2}=0, X_{j3}=0, X''_{j1}=0 \end{cases} \end{aligned} \tag{13}$$

$$y=0 \text{ 时:} \quad Y_{i1}=0, Y_{j1}=0, Y_2=0, Y''_2=0 \tag{14}$$

$$y=b \text{ 时:} \quad Y'_2=0, \quad Y'''_2=0 \tag{15}$$

有

$$(\gamma_i^4 - \gamma_j^4) \int_0^a \int_0^b W_i W_j dx dy = R_1 + R_2 + R_3 \tag{16}$$

其中,

$$\begin{aligned} R_1 &= \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W_i}{\partial x^4} W_j dx dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W_j}{\partial x^4} W_i dx dy \\ &= - \sum_{n < N_i} [X''_{i2} X'_{j1}]_0^b \int_0^b Y_{j1} Y dx dy - \\ &\quad \sum_{n > N_j} [X''_{i3} X'_{j1}]_0^b \int_0^b Y_{j1} Y dx dy + \\ &\quad \sum_{n < N_j} [X''_{j2} X'_{i1}]_0^b \int_0^b Y_{i1} Y dx dy + \\ &\quad \sum_{n > N_j} [X''_{j3} X'_{i1}]_0^b \int_0^b Y_{i1} Y dx dy + \\ &\quad \sum_{n < N_i} \frac{b}{2} [X''_{j2} X'_{i2}]_0^b - [X''_{i2} X'_{j2}]_0^b \} + \\ &\quad \sum_{N_i < n < N_j} \frac{b}{2} [X''_{j2} X'_{i3}]_0^b - [X''_{i3} X'_{j2}]_0^b \} + \\ &\quad \sum_{n > N_j} \frac{b}{2} [X''_{j3} X'_{i3}]_0^b - [X''_{i3} X'_{j3}]_0^b \} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= 2 \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W_i}{\partial x^2 \partial y^2} W_j dx dy - 2 \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W_j}{\partial x^2 \partial y^2} W_i dx dy \\ &= 2 [Y'_{i1} Y_{j1}]_{y=b} \int_0^a X''_{i1} X_{j1} dx - \\ &\quad [Y'_{j1} Y_{i1}]_{y=b} \int_0^a X''_{j1} X_{i1} dx + \\ &\quad \sum_{n < N_j} [Y'_{i1} Y_{j2}]_{y=b} \int_0^a X''_{i1} X_{j2} dx + \\ &\quad \sum_{n > N_j} [Y'_{i1} Y_{j2}]_{y=b} \int_0^a X''_{i1} X_{j2} dx - \\ &\quad \sum_{n < N_j} [Y'_{j1} Y_{i2}]_{y=b} \int_0^a X''_{j1} X_{i2} dx - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{n > N_i} [Y'_{j1} Y_{j2}]_{y=b} \int_0^a X''_{j1} X_{i2} dx \} \tag{18} \\ R_3 &= \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W_i}{\partial y^4} W_j dx dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^4 W_j}{\partial y^4} W_i dx dy \\ &= [Y'''_{i1} Y_{j1}]_{y=b} - [Y'''_{j1} Y_{i1}]_{y=b} + \\ &\quad [Y''_{j1} Y'_{i1}]_0^b - [Y''_{i1} Y'_{j1}]_0^b \int_0^a X_{i1} X_{j1} dx + \\ &\quad \sum_{n < N_j} [Y'''_{i1} Y_{j2}]_{y=b} + [Y'''_{i1} Y'_{j2}]_{y=0} + \\ &\quad [Y''_{j2} Y'_{i1}]_{y=b} \int_0^a X_{i1} X_{j2} dx + \\ &\quad \sum_{n > N_j} [Y'''_{i1} Y_{j2}]_{y=b} + [Y'''_{i1} Y'_{j2}]_{y=0} + \\ &\quad [Y''_{j2} Y'_{i1}]_{y=b} \int_0^a X_{i1} X_{j2} dx - \\ &\quad \sum_{n < N_i} [Y'''_{j1} Y_{j2}]_{y=b} + [Y'''_{j1} Y'_{j2}]_{y=0} + \\ &\quad [Y''_{j2} Y'_{j1}]_{y=b} \int_0^a X_{i2} X_{j2} dx - \\ &\quad \sum_{n > N_i} [Y'''_{j1} Y_{j2}]_{y=b} + [Y'''_{j1} Y'_{j2}]_{y=0} + \\ &\quad [Y''_{j2} Y'_{j1}]_{y=b} \int_0^a X_{i3} X_{j2} dx \end{aligned} \tag{19}$$

利用 $x=0$ 和 $x=a$ 时 $\frac{\partial W}{\partial x} = 0$ (为固定边时)或 $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0$ (为简支边时)的边界条件,可以导出 $R_1 = 0$,利用 $y=0$ 时 $\frac{\partial W}{\partial y} = 0$ (为固定边时)或 $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$ (为简支边时)的边界条件,可以导出式(19)中对应 $y=0$ 各项(或有关各项之和)为零值,然后利用 $y=b$ 时的边界条件可以导出 $R_2 + R_3 = 0$.

由式(16),并考虑 $\gamma_i \neq \gamma_j$,即有

$$\int_0^a \int_0^b W_i W_j dx dy = 0 \tag{20}$$

式(20)表示满足边界条件的第 i 振形和第 j 振形具有正交性.如果 $N_i > N_j$ 时,上述正交性仍然成立,当采用以 y 方向为主振方向排序时,振形正交性也同样成立.

3 频率方程及振形曲线

3.1 x 方向为主振方向的振动

利用式(3)及边界条件及 A_m, B_m, C_m, D_m 不全为零的条件可得图1所示6种矩形板的频率方程及相应的振形曲线,其中图1(a),(b)所示一对边简支矩形板的结果与经典解法完全相同.为节省篇幅,我们仅写出图1(c)矩形板的频率方程为

$$\frac{1}{\alpha \operatorname{ch} \alpha b} \left\{ \alpha \left[\gamma^2 + (1 - \mu) \alpha^2 \right] \operatorname{sh} \alpha b \cos \alpha b - \right. \\ \left. \alpha \left[\gamma^2 + (\mu - 1) \alpha^2 \right] \operatorname{ch} \alpha b \sin \alpha b \right\} - \\ \frac{16 \alpha^2 \alpha_2 \gamma \cos \alpha_2 b}{ab} \cdot \\ \left\{ \sum_{n < \frac{2b}{\pi}} \frac{(\mu \alpha^2 + \beta^2)^2}{(\alpha_1^2 + \beta^2)(\beta^2 - \alpha_2^2)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2)} \cdot \right. \\ \left. \frac{\operatorname{sh} \beta_1 \sin \beta_2 \alpha}{[\beta \operatorname{sh} \beta_1 \cos \beta_2 \alpha - \beta \operatorname{ch} \beta_1 \sin \beta_2 \alpha]} + \right. \\ \left. \sum_{n > \frac{2b}{\pi}} \frac{(\mu \alpha^2 + \beta^2)^2}{(\alpha_1^2 + \beta^2)(\beta^2 - \alpha_2^2)(\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 - \beta^2)} \cdot \right. \\ \left. \frac{2 \operatorname{sh} \beta_1 \operatorname{ch} \beta_3 \alpha}{[\beta \operatorname{sh} \beta_1 \operatorname{ch} \beta_3 \alpha - \beta \operatorname{ch} \beta_1 \operatorname{ch} \beta_3 \alpha]} \right\} \\ = 0 \quad (21)$$

表 1 x 轴为主振方向时自振频率及振形节线图

Tab. 1 Free vibration frequencies and nodal line diagrams taken x axis as the main mode direction

m 值	自振频率 $\left(\frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}\right)$					振形节线图				
	ω_{m1}	ω_{m2}	ω_{m3}	ω_{m4}	ω_{m5}	W_{m1}	W_{m2}	W_{m3}	W_{m4}	W_{m5}
1	16.86 (16.70)	31.20 (30.95)	64.05 (63.87)	117.30 (117.1)	190.59					
2	51.47 (51.22)	67.59 (67.28)	101.23 (100.8)	153.79 (153.4)	226.55					
3	105.45 (105.2)	122.77 (122.3)	157.40	211.19	283.01					
4	179.36	197.12	232.82	286.56	359.67					
5	272.77	290.71	327.30	382.15	455.26					

3.2 y 方向为主振方向的振动

对应 y 方向第 N 个主振形 (N=1, 2, 3, …), 相应的振动主波形为 $\sin \frac{n \pi y}{2b}$ (n=1, 3, 5, …), 即 $N = \frac{n+1}{2}$. 对应某一确定的主振形有一系列 γ 值, 有些 γ 值属于 $n > \frac{2b}{\pi}$ 的范围, 有些 γ 值属于 $n < \frac{2b}{\pi}$ 的范围, 这需要通过试算确定. 对图 1(a), (b) 所示一对边简支矩形板, 由 x=0 和 x=a 二个边界上的边界条件及 E_n, F_n, G_n, H_n 不全为零的条件, 由式 (4) 和式 (5) 分别得 $\sin \beta_2 \alpha = 0$ 和 $\operatorname{sh} \beta_3 \alpha = 0$, 但这二个频率方程是假解, 考虑 y=0 和 y=b 的边界条件后得相应的振形曲线恒为零值, 这说明它

式中: n=1, 3, 5, …; μ 为材料泊松比. 之后令 $C_m=1$, 并求出其它待定系数, 代入式 (3) 即得相应的振形曲线.

表 1 列出图 1(c) 所示方板 (a=b, μ=0.333) 各阶自振频率及振形节线图, 并与文献 [1] 的结果进行比较, 二者基本上相近, 但本文振形具有正交性, 这具有较大的理论价值.

由振形节线图可知, 对某一特定的 m 值, 在 x 方向的振动波形保持 $\sin \frac{m \pi x}{a}$ 不变, 但 y 方向的振动波形随 W_{mN} 中下标 N 的增加而改变, 总体上呈现 $\sin \left(\frac{2N-1}{2b} \pi y\right)$, N=1, 2, … (即 $\sin \frac{n \pi y}{2b}$, n=1, 3, 5, …) 的振动.

们不发生 y 方向为主振方向的振动.

表 2 列出图 1(c) 所示方板 (a=b, μ=0.333) 取 y 方向为主振方向时各阶自振频率及振形节线图, 表中带“*”者为 $n > \frac{2b}{\pi}$ 的振动. 与表 1 结果相比, 其自振频率十分相近, 振形节线图也十分相似, 仅排序方向不同.

4 振形表达式结构分析

由计算结果可知: 对图 1(c) 所示的矩形板, 当以 x 轴方向为主振方向并取 m=2 时, 有 $\omega_{m3}=101.23$, 当以 y 轴方向为主振方向并取 n=5 时 (相当于 N=3), 有 $\omega_{2N}=100.39$, 相应的振形节线图也基本相同. 它可以近似用下列曲线来描述:

$$W=f(y)\sin \frac{2\pi x}{a}+g(x)\sin \frac{5\pi y}{2b} \quad (22)$$

式 (22) 表示板在 x 方向上主要呈现 $\sin \frac{2\pi x}{a}$ 波形, 在 y 方向上呈现 $\sin \frac{5\pi y}{2b}$ 波形. 但是由于式 (22) 不能满足全部边界条件, 因此它并不是精确的振形曲线, 需要对式 (22) 进行补充或修正. 补充方法有二种途径, 第一是保持第一项不变, 将第二项改为 $\sum_n g(x)\sin \frac{n\pi y}{2b}$, 第二种途径是保持第二项不变, 将第一项改为 $\sum_m f(y)\sin \frac{m\pi x}{a}$. 修正后的振

形曲线既可以满足全部边界条件, 又能保持振形曲线的正交性. 二种修正方法之所以计算结果相同是因为图 1(c) 矩形板两个方向的振动是耦合的.

由数值计算过程中待定系数相对值也可以得到上述结论, 当以 x 向为主振方向计算时, 在式 (3) 中与 ω_{m3} 对应的系数 E_5, F_5, G_5, H_5 要比其它的 E_n, F_n, G_n, H_n 大得多, 当以 y 向为主振方向计算时, 在式 (4) 或式 (5) 中与 ω_{2N} 对应的系数 A_2, B_2, C_2, D_2 要比其它的 A_m, B_m, C_m, D_m 大得多.

表 2 y 轴为主振方向时自振频率及振形节线图

Tab .2 Free vibration frequencies and nodal line diagrams taken y axis as the main mode direction

n 值	自振频率 $(\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{D}{m}})$					振形节线图				
	ω_{1N}	ω_{2N}	ω_{3N}	ω_{4N}	ω_{5N}	W_{1N}	W_{2N}	W_{3N}	W_{4N}	W_{5N}
1	16.66	51.09	104.74	180.21	273.10					
3	30.81	67.14	122.09	196.21	289.95					
5	63.76	100.39	156.52	231.76	326.11					
7	116.95 *	153.08	209.28	285.75	380.90					
9	190.30 *	225.52	281.61	357.41	454.04					

对图 1(a), (b) 所示 $x=0$ 和 $x=a$ 均为简支边的二种矩形板, 当取 x 方向为主振方向时, 振形函数 $f(y)\sin \frac{m\pi x}{a}$ 可以满足全部边界条件, 这说明这二种板 x 方向的振动波形 $\sin \frac{m\pi x}{a}$ 不能与 y 方向振动波形 $\sin \frac{n\pi y}{2b}$ 耦合. 当取 y 方向为主振方向时, 解答 $g(x)\sin \frac{n\pi y}{2b}$ 自身不能满足全部边界条件, 又不能与波形 $\sin \frac{m\pi x}{a}$ 耦合, 因此这种振动就不会发生.

5 结论

(1) 主振方向排序法认为在主振方向上振动主波形是唯一的, 相应的待定系数不应全为零, 在另一振动方向上要伴随产生与该主振形对应的

耦合振动, 该耦合振动所包含的振动波形形状、数量不是唯一的, 由此建立的振形函数表达式既可以满足振动微分方程和全部边界条件, 又具有振形的正交性, 因此是对矩形板振动的精确描述.

(2) 一对边简支矩形板仅发生一对边简支方向为主振方向的振动, 其余板的自由振动分析可任选一主方向进行, 这是由于这些板两个方向的振动具有耦合性, 导致产生了两种描述方法.

(3) 振形函数中的振动波形必须符合板边界条件所能限定的变形形态, 所采用三角级数在相应区间上应具有正交性. 这也是保证振形函数表达式具有正交性的必要条件.

本文方法还可以用于其它边界条件矩形板的动力分析, 如文献 [2~4].

参考文献:

[3] GORMAN DJ .Free Vibration Analysis of Rectangular plates
[M] .Newyork ,Elsevier , 1982.

[2] 许琪楼,王仁义,常少英· 四边支承矩形板自由振动的精确解法[J] · 郑州工业大学学报, 2001, 22(1) :

1~5.

[3] 许琪楼· 四边支承矩形板振形曲线及其正交性[J] · 郑州大学学报(工学版) , 2002, 23(2) :1~4.

[4] 许琪楼· 矩形悬臂板自由振动精确解法[J] · 振动与冲击, 2001, 20(4) :52~56.

Free Vibration Analysis of Rectangular Plates with Three Edges Supported and One Edge Free

XU Qitlou¹, XU Lei²

(1. College of Civil Engineering , Zhengzhou University , Zhengzhou 450002 China ; 2. National North China Electric Power Engineering Co .LTD , Beijing 100043,China)

Abstract : Mode shapes of plate must possess orthogonality under free vibration . The mode shape expressions of the rectangular plates with three edges supported and one edge free established by the arrangement method on the main vibration direction can satisfy the governing differential equation and all boundary conditions and the mode shape enforcing all boundary conditions can possess orthogonality . The vibration wave number in expression is unique at the main vibration direction and is not unique at the other direction . The waveform used in the mode shape is in agreement with the deformation pattern permitted by the edge support . In this paper it proves that the mode shape is orthogonality , the meaning of the arrangement method is clarified by analyzing the structure of mode shape expression , the free vibration frequency equations of rectangular plates with different boundary conditions are deduced , and twenty five free vibration frequencies and corresponding nodal line diagrams per plate are calculated , which clearly show the method above is theoretically correct .

Key words : elastic plate ; free vibration ; mode orthogonality