

文章编号 :1671 - 6833( 2002 )03 - 0107 - 03

# 楔形柱平面内稳定极限荷载计算分析

刘中华, 李 天

( 郑州大学土木工程学院 河南 郑州 450002 )

摘 要 : 利用数值方法对楔形柱平面内稳定极限荷载的计算进行了探讨 , 在迭代条件中采用混合迭代的方法 , 避免了在截面  $M - P - \Phi$  关系计算中迭代不收敛问题 , 在构件的荷载 - 挠度关系计算中应用弹塑性条件 , 优化了计算过程 , 缩短了计算时间 , 并利用程序分析了柱子的极限荷载随楔率与柱端弯矩比的变化规律 , 所得结论可供设计人员参考 .

关键词 : 楔形柱 ; 数值方法 ; 极限荷载 ; 楔率

中图分类号 : TU 323.1 文献标识码 : A

门式刚架是我国目前在钢结构中应用最为普遍的一种结构形式 . 为节约钢材 , 降低成本 , 门式刚架的截面一般都根据弯矩的变化规律而设计成腹板高度线性变化的楔形 . 由于截面的变化 , 使得结构极限荷载的计算较为困难 . 目前对变截面门式刚架的计算大多集中在弹性阶段 , 文献 [1] 对楔形柱的平面内弹性稳定进行过研究 , 文献 [2] 对变截面门式刚架的平面内弹性稳定进行了探讨 , 他们在计算中都是利用有限元方法 , 计算程序较为繁琐 . 本文避开了较为庞杂的有限元方法 , 利用数值积分法对楔形柱的平面内稳定极限荷载的计算进行了讨论 .

## 1 基本假定

(1) 材料为理想的弹塑性体 , 即应力  $\sigma_i$  与应变  $\epsilon_i$  满足下列关系

$$\begin{cases} \sigma_i = -\sigma_y & (\epsilon_i < -\epsilon_y); \\ \sigma_i = \epsilon_i E & (-\epsilon_y \leq \epsilon_i \leq \epsilon_y); \\ \sigma_i = \sigma_y & (\epsilon_i > \epsilon_y). \end{cases} \quad (1)$$

(2) 平截面假定 , 即截面形状在受荷前后保持不变 .

(3) 构件的变形为小变形 .

## 2 计算原理

首先 , 建立任一截面的内力与变形 ( $M - P - \Phi$ ) 之间的关系 . 将工字钢截面划分为若干单元 , 单元面积为  $A_i$  . 根据平截面假定 , 截面上任意一

点的应变  $\epsilon_i$  , 是轴向应变  $\epsilon_0$  , 弯曲应变  $\Phi y_i$  和残余应变  $\epsilon_{ri}$  三部分的代数和 , 即

$$\epsilon_i = \epsilon_0 + \Phi y_i + \epsilon_{ri} . \quad (2)$$

由假定 (1) , 即可根据应变  $\epsilon_i$  求出各单元的应力  $\sigma_i$  . 由于要考虑塑性的发展 , 内力与变形之间的关系需通过数值积分获得 , 即

$$F = \sum_A \sigma_i A_i , \quad (3)$$

$$M = \sum_A \sigma_i A_i y_i . \quad (4)$$

对式 (3) 和 (4) 在整个截面上进行数值积分 , 即可得到截面弹塑性状态时的  $M - P - \Phi$  关系 . 然后 , 通过对于整个构件内外力平衡和变形协调以及截面内力与变形之间的关系 , 求得构件极限荷载 .

假设构件的挠曲线为  $y(x)$  , 采用泰勒级数分段插值<sup>[3,4]</sup> , 其表达式为

$$y(x+a) = y(a) + ay'(x) + \frac{a^2}{2} y''(x) + \dots + \frac{a^n}{n!} y^{(n)}(x) + R_n . \quad (5)$$

式中 :  $R_n$  为余项 ,  $R_n = \frac{a^{(n+1)}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(x+aa) \cdot \theta$  ,  $0 < \theta < 1$  , 可近似地取其平均值  $\theta = 1/2$  .

根据假定  $y''(x) = -\Phi(x)$  和  $y'(x) = \theta(x)$  , 将式 (5) 与图 1 中长度为  $a$  的任一单元的挠曲线比较后可得

$$\begin{aligned} y_i &= y_{i-1} + a\theta_{i-1} - \frac{1}{2} a^2 \Phi_{i-1} + \dots \\ &\approx y_{i-1} + a\theta_{i-1} - \frac{1}{2} a^2 \Phi_{mi} , \end{aligned} \quad (6)$$

$$\theta_i = \theta_{i-1} - a\Phi_{i-1} \approx \theta_{i-1} - a\Phi_{mi} . \quad (7)$$

逐级增加荷载 , 逐步形成荷载与位移之间的

收稿日期 2002 - 03 - 10 ; 修订日期 2002 - 06 - 10

项目资助 河南省教育厅自然科学基金资助项目

作者简介 : 刘中华 (1976 - ) , 男 , 湖北省天门市人 , 郑州大学硕士研究生 , 主要从事结构工程方面的研究 .

数值计算结果,最终由荷载的最大值得到压弯构件的极限荷载.

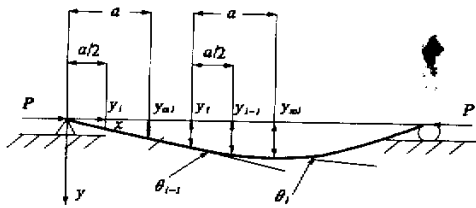


图1 构件单元划分  
Fig.1 Partition of member unit

3 几个问题的讨论

3.1 迭代收斂准则

在计算构件极限荷载的过程中,首先从构件左端开始,将构件划分为  $m$  个长度为  $a$  的单元,如图 1 所示,并假定构件左端截面转角为初始角  $\theta_0$ ,已知构件两端挠度为  $y_0 = 0, y_m = 0$ ,则有单元中点处挠度  $y_{mi} \approx y_{i-1} + \frac{a}{2} \theta_{i-1}$ ,单元中点处弯矩  $M_{mi} = M + Py_{mi}$ ,根据已经求出的  $M - P - \Phi$  关系,可以得到单元中点的曲率  $\Phi_{mi}, \theta_i = \theta_{i-1} - a\Phi_{mi}, y_i \approx y_{i-1} + a\theta_{i-1} - \frac{1}{2} a^2 \Phi_{mi}$ ,从第一个单元开始,依此类推,一直计算到构件最后一个单元.如果满足边界条件  $y_m \leq 10^{-3}$ ,结束循环;如果不满足,则调整  $\theta_0$ ,重复上述过程,直至  $y_m = 0$ ,结束循环.增加  $P$  值后再重复上述过程,直到反复调整  $\theta_0$  也无法收敛,也就是说出现发散现象,则说明构件已达到失稳极限承载力.取刚开始出现这种现象的荷载为构件的极限荷载  $P_u$ .

3.2 减少迭代次数的措施

3.2.1 混合迭代的应用

在截面  $M - P - \Phi$  的计算过程中,先给定  $P$  和  $\Phi$ ,取迭代变量  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0 + (P - F)/A_e E$ ,式中  $E$  为弹性模量初始值,  $\varepsilon_0 = 0, F = 0$ ,由式(1)和(2)得到  $\sigma_i$ ,代入式(3)得到第一轮的压力  $F$ ,如果不满足收敛条件,则修正  $\varepsilon_0$  后重新进行迭代计算,直至满足收敛条件,即可由式(4)得到  $M$ .当截面进入弹塑性阶段后,由于弹性截面积  $A_e$  的值不断变化,经常遇到  $P - F$  的值往复循环,出现迭代不收敛.如果采用全量迭代法,取迭代变量  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0 (P - F)/AE$ ,循环一定可以收敛,但所需时间大大增加.本文则采取混合迭代的方法,在截面屈服达 90% 之前取  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0 + (P - F)/A_e E$ ,截面屈服达

90% 之后取用  $A$  代替  $A_e$ ,使循环始终能以规定的精度快速收敛.不断增加  $\Phi$  值并重复上述过程,直到截面完全屈服,即得到截面的  $M - P - \Phi$  关系.

3.2.2 弹塑性条件的应用

由于是楔形柱的截面,因此,每个单元都对应不同的  $M - P - \Phi$  关系,这使得计算过程十分费时.本文对弹性区和弹塑性区采取不同的  $M - P - \Phi$  关系,对没有进入塑性的单元只计算其对应截面的弹性  $M - P - \Phi_e$  关系,进入塑性的单元才计算其对应截面的弹塑性  $M - P - \Phi$  关系,从而大大节约了计算时间(约 80% 左右).另外,本文经过反复试算得出:宜取循环变量  $\theta_0 = \theta_0 - ay_m/a, a = 0.03 \sim 0.06$ ,一般经过 3 ~ 10 次循环即可达到满意的精度.

4 程序正确性验证

由于楔形柱极限荷载理论解很难求得,本文就用等截面柱的极限荷载的计算来对程序进行验证.选用文献[4]中一算例进行计算,算例参数如图 2 所示.对于翼缘,当  $x \leq 70 \text{ mm}$  时,截面上任一点的残余应力  $\sigma_{ri} = 0.02(x - 7)^4 - 8.37(x - 7)^2 + 127.1 \text{ N/mm}^2$ ;对于腹板,当  $y \leq 74 \text{ mm}$  时,  $\sigma_{ri} = 0.05y^4 - 9.71y^2 + 146.1 \text{ N/mm}^2$ ;  $f_y = 235 \text{ N/mm}^2$ ,弹性模量  $E = 206000 \text{ N/mm}^2$ ,材料为理想的弹塑性体;构件初始弯曲的矢高为长度的 1/1000,按正弦曲线变化,  $y_0 = v_0 \sin \frac{\pi x}{l}$ ;截面几何性质为  $A = 3360 \text{ mm}^2, I_x = 14095500 \text{ mm}^4, i_x = 64.8 \text{ mm}, l_{ox} = i_x \lambda_x, I_y = 3658700 \text{ mm}^4, i_y = 33 \text{ mm}, l_{oy} = i_y \lambda_y$ .计算轴心受压构件的稳定系数结果如表 1 所示.从计算结果可以看出:按本文计算原理编制的程序具有很好的精度,其最大误差在 1.64% 以内.

表 1 焊接 I 型截面轴心受压构件稳定系数  
Tab.1 Stabilization coefficient of axial compression member with welded I section

| $\lambda$ 参考文献[4] 本文程序 |       |       | $\lambda$ 参考文献[4] 本文程序 |       |       |
|------------------------|-------|-------|------------------------|-------|-------|
| 20                     | 0.976 | 0.960 | 140                    | 0.348 | 0.351 |
| 40                     | 0.906 | 0.911 | 160                    | 0.280 | 0.280 |
| 60                     | 0.799 | 0.801 | 180                    | 0.228 | 0.228 |
| 80                     | 0.667 | 0.673 | 200                    | 0.188 | 0.188 |
| 100                    | 0.543 | 0.549 | 22                     | 0.158 | 0.158 |
| 120                    | 0.436 | 0.440 | 240                    | 0.134 | 0.133 |

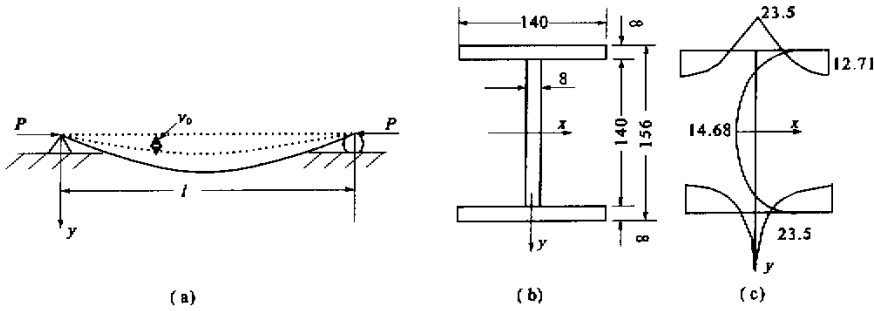


图2 轴心受压构件

Fig.2 Axial compression member

5 不同楔率杆极限承载力分析

用本程序对不同楔率  $\gamma$  的构件不同端弯矩比的极限荷载进行了计算分析,计算所选构件的参数如下:长度  $l = 9000\text{ mm}$ ,上下翼缘宽厚  $b_f \times h_f = 150\text{ mm} \times 10\text{ mm}$ ,腹板厚  $t = 6\text{ mm}$ ,构件大小端腹板高之和  $h_D + h_X = 250\text{ mm}$ ,楔率  $\gamma = h_D/h_X$ ,作用于构件大小端弯矩比  $\mu = M_D/M_X$ ,小端弯矩  $M_X = 0.031\text{ N}\cdot\text{mm}$ ,得出其变化规律如图3所示.可以看出,当构件楔率  $\gamma < 2.0$  时,其极限荷载与等截面构件的极限荷载相差不大;当构件楔率  $\gamma > 2.0$  后,构件的极限荷载随着构件两端弯矩的比值的增大而减小,但其减小的程度随着

$\gamma$  的增大而趋于减缓,且只有当两端弯矩比大于400后,变截面构件的极限荷载才大于等截面构件的极限荷载.即只有在构件两端弯矩相差很大的情况下才宜选用变截面构件.

6 结束语

本文对变截面构件极限荷载的数值计算方法进行了探讨,改进了迭代收敛控制条件,优化了计算过程,并编制了相关计算程序.本文还利用编制的程序对变截面构件极限荷载随构件楔率及两端弯矩比的变化规律进行了简单的分析,得出了可供设计人员参考使用的结论.

参考文献:

[1] 王文明,郭彦林,赵熙元.变截面门式钢刚架结构体系平面内整体稳定研究[J].建筑结构学报,1999,20(4):25-33.  
[2] 刘朝宏,李天.轻型门式刚架平面内稳定系数计算[J].郑州工业大学学报,2001,22(2):73-76.  
[3] 吕烈武,沈世钊,沈祖炎,等.钢结构构件稳定计算[M].北京:中国建筑工业出版社,1983.  
[4] 陈骥.钢结构稳定理论与设计[M].北京:科学出版社,2001.

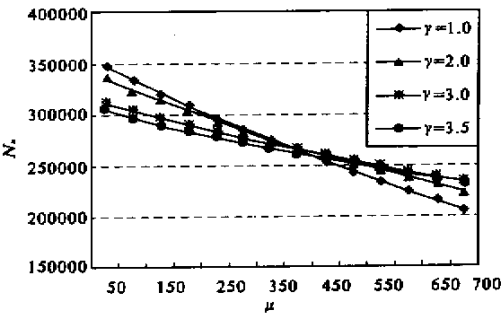


图3 极限荷载随  $\mu$  与  $\gamma$  的变化规律

Fig.3 Variation method of ultimate load along with  $\mu$  and  $\gamma$

Calculation and Analysis of In-plane Stability Ultimate Load of Tapered Column

LIU Zhong-hua, LI Tian

(College of Civil Engineering, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China)

**Abstract:** This paper discusses in-plane stability ultimate load of tapered column with numerical approach by applying mixed iterative method in iterative condition averts divergence in calculating course of sectional M-P- $\varphi$  relation, by applying elastoplasticity condition in calculating course of member load-deflection relation optimizes calculating course and shortens calculating time, analyzes variational method of ultimate load of column along with tapering ratios and moment ratios of chapter, and reaches the conclusion that may be used as reference by designer.

**Key words:** tapered column; numerical approach; ultimate load; tapering ratio