文章编号:1671 - 6833(2002)03 - 0041 - 03

一个非线性色散 - 耗散方程的新孤子解和周期解

王 霞,王书彬

(郑州大学工程力学系,河南 郑州 450002)

摘 要:简单介绍用于求非线性偏微分方程精确解的截尾辅助函数法,这种方法简洁有效.利用截尾辅助函数法,借助于计算机代数系统 Mathematica,得到了用于描述冷离子和热电子组成的离子体弱非线性离子声波演化的非线性色散 - 耗散方程的新的孤子解、周期解和几组稳态解.这些解均含有任意常数,当任意常数取特定值时,利用计算机代数系统 Mathematica 给出了部分解的图形.

关键词:孤子解;周期解;计算机代数系统

中图分类号:O 175.29 文献标识码:A

在分析由冷离子和热电子组成的二流体等离子模型时,Kakutani 和 Kawahara 提出了如下的一个非线性色散耗散偏微分方程[1]:

$$u_t + uu_x + bu_{xxx} - a(u_t + muu_x)_x = 0. \tag{1}$$

对于式(1),文献[2]利用式(1)的 Painlevé 性质分析导出了它的新的精确解,在文献[3]中,作者结合直接代数方法和假设方法求出它的一些孤波解和周期三角函数解.最近,在文献[4,5]中,闫振亚提出了一种求解非线性发展方程的新算法——截尾辅助函数法.本文利用这种算法求出了式(1)的新孤子解和周期解,算法的基本思想如下:

令

$$u(x,t) = u(\zeta), \zeta = x + \lambda t + \zeta_0, \tag{2}$$

并设式(1)有如下形式的解

$$u(\zeta) = \sum_{i=1}^{n} \omega^{i-1}(\zeta)[a_i\omega(\zeta) + b_i \cdot \sqrt{\mu_1(1+\mu_2\omega^2(\zeta))}] + a_0. \tag{3}$$

其中,待定函数 $\omega = \omega(\zeta)$ 满足

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = R(1 + \mu_2\omega^2), \tag{4}$$

这里取 $\mu_j = \pm 1 (j = 1,2)$.将 u 的待定函数形式代入式(1),平衡其最高阶偏导数项和最高阶非线性项可确定常数 n,并得到关于 ω,$\sqrt{\mu_1(1+\mu_2\omega^2)}$ 及其线性组合的多项式,分别令它们的系数为零,解得待定系数 a_i,b_i,a_0 及 R 的值.本文的所有计算均在 Mathematica 软件下进行.

1 $m \neq 0$,$m \neq 1$ 情形下式(1)的行波解

$m \neq 0$ 时,将式(2)和式(3)代入式(1),平衡其最高阶偏导数项和最高阶非线性项,可得 $n = 1$,于是设式(1)的解具有如下形式

$$u(x,t) = c_1\omega(\zeta) + c_2\sqrt{\mu_1(1+\mu_2\omega^2(\zeta))} + c_3, \tag{5}$$

其中,$\omega' = R(1 + \mu_2\omega^2)$;$c_1$,$c_2$,$c_3$ 为待定常数.将式(5)代入(1),令 $\omega^i(\mu_1 + \mu_1\mu_2\omega^2)^{\frac{j}{2}} (j = 1,2;i = 0,1,2,3)$ 的系数分别为零,化简得如下方程组

$$\begin{cases} -c_1c_3 + ac_1^2mR - c_1\lambda - 2bc_1R^2\mu_2 + \\ \qquad ac_2^2mR\mu_1\mu_2 = 0, \\ c_1^2 - 2ac_1c_3mR\mu_2 - 2ac_1R\lambda\mu_2 + c_2^2\mu_1\mu_2 = 0, \\ ac_1^2m - 2bc_1R\mu_2 + ac_2^2m\mu_1\mu_2 = 0, \\ -c_1 + ac_3mR\mu_2 + aR\lambda\mu_2 = 0, \\ c_3 - 5ac_1mR + \lambda + 5bR^2\mu_2 = 0, \\ c_1 - ac_3mR\mu_2 - aR\lambda\mu_2 = 0, \\ ac_1m - bR\mu_2 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

(1) 情形 1:$\mu_1 = 1$,$\mu_2 = 1$,解方程组(6),得以下两组解

① $c_1 = \dfrac{bR}{am}$,$c_3 = \dfrac{b}{a^2m(m-1)}$,

$\lambda = -\dfrac{b}{a^2m(m-1)}$,$c_2 = -c_1$;

② $c_1 = \dfrac{bR}{am}$,$c_3 = \dfrac{b}{a^2m(m-1)}$,

收稿日期:2002 - 04 - 02;修订日期:2002 - 06 - 10

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10071074);河南省自然科学基金资助项目(004050100)

作者简介:王霞(1970 -),女,河南省开封县人,郑州大学讲师,硕士,主要从事并行算法和偏数分方程方面的研究.

$$\lambda=-\frac{b}{a^2m(m-1)},c_2=c_1;$$

(2) 情形2:$\mu_1=-1,\mu_2=-1$,解方程组(6),得以下两组解

① $c_1=-\frac{bR}{am},c_3=\frac{b}{a^2m(m-1)},$

$$\lambda=-\frac{b}{a^2m(m-1)},c_2=-c_1;$$

② $c_1=-\frac{bR}{am},c_3=\frac{b}{a^2m(m-1)},$

$$\lambda=-\frac{b}{a^2m(m-1)},c_2=c_1;$$

当取 $\mu_2=1$ 时,式(4)的解为

$$\omega=\omega(\zeta)=\begin{cases}\tan(R\zeta+\zeta_0),\\-\cot(R\zeta+\zeta_0).\end{cases}\tag{7}$$

当取 $\mu_2=-1$ 时,式(4)的解为

$$\omega=\omega(\zeta)=\begin{cases}\tanh(R\zeta+\zeta_0),\\\coth(R\zeta+\zeta_0).\end{cases}\tag{8}$$

结合情形1和2,式(2),(6)和(7),可得到式(1)的如下两组周期解

$$u(x,t)=\frac{b}{a^2m(m-1)}+\frac{bR}{am}\tan\left[R\left(x-\frac{b}{a^2m(m-1)}t\right)+\zeta_0\right]\pm\frac{bR}{am}\sec\left[R\left(x-\frac{b}{a^2m(m-1)}t\right)+\zeta_0\right].\tag{9}$$

$$u(x,t)=\frac{b}{a^2m(m-1)}-\frac{bR}{am}\cot\left[R\left(x-\frac{b}{a^2m(m-1)}t\right)+\zeta_0\right]\pm\frac{bR}{am}\csc\left[R\left(x-\frac{b}{a^2m(m-1)}t\right)+\zeta_0\right].\tag{10}$$

和一组孤子解

$$u(x,t)=\frac{b}{a^2m(m-1)}-\frac{bR}{am}\coth\left[R\left(x-\frac{b}{a^2m(m-1)}t\right)+\zeta_0\right]\pm\frac{bR}{am}\mathrm{csch}\left[R\left(x-\frac{b}{a^2m(m-1)}\cdot t\right)+\zeta_0\right].\tag{11}$$

当 $\mu_1=1,\mu_2=-1$ 或 $\mu_1=-1,\mu_2=1$ 时,得到复数解和与上述重复的解,这里不考虑复数解,因此略去这两种情况.当 $m=1$ 时,上述方法仅能求出式(1)的平凡解,这里不再单独讨论.

2 $m=0$ 情形下式(1)的行波解

$m=0$ 时,将式(2)和(3)代入式(1),平衡其最高阶偏导数项和最高阶非线性质,可得 $n=2$,于是设方程(1)的解具有如下形式

$$u(x,t)=c_1\omega(\zeta)+c_2\sqrt{\mu_1(1+\mu_2\omega^2(\zeta))}+c_3\omega^2(\zeta)+c_4\omega(\zeta)\sqrt{\mu_1(1+\mu_2\omega^2(\zeta))}+c_5.\tag{12}$$

其中,$\omega'=R(1+\mu_2\omega^2)$;$c_1,\cdots,c_5$ 为待定常数.将式(5)代入式(1),令 $\omega^i(\mu_1+\mu_1\mu_2\omega^2)^{\frac{j}{2}}(j=1,2;i=0,1,2,3,4)$ 的系数分别为零,类似于 $m\neq0$ 的作法,可得到如下两组解

$$u(x,t)=\frac{bR(\pm5+6aR)}{a}\pm3bR^2\mathrm{csch}^2\left(\frac{1}{2}\eta\right)[\mp\cosh(\eta)+\sinh(\eta)],\tag{13}$$

$$u(x,t)=\frac{bR(\pm5+6aR)}{a}\pm3bR^2\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\eta\right)[\mp\cosh(\eta)+\sinh(\eta)].\tag{14}$$

其中,$\eta=R(x\mp\frac{5bR}{a}t)+\zeta_0$,及如下四组稳态解

$$\begin{cases}u(x,t)=5bR^2-3bR^2\cosh(Rx+\zeta_0)\,\mathrm{csch}^2[\frac{1}{2}(Rx+\zeta_0)],\\u(x,t)=5bR^2-3bR^2\cosh(Rx+\zeta_0)\,\mathrm{sech}^2[\frac{1}{2}(Rx+\zeta_0)],\\u(x,t)=-5bR^2+3bR^2\cos(Rx+\zeta_0)\sec^2[\frac{1}{2}(Rx+\zeta_0)],\\u(x,t)=-5bR^2-6bR^2\tan(Rx+\zeta_0)[\tan(Rx+\zeta_0)\pm\sec(Rx+\zeta_0)],\end{cases}\tag{15}$$

当 $a=0$ 时,还可得到如下四组解

$$\begin{cases}u(x,t)=\frac{1}{6}(30bR^2-6\lambda)-3bR^2\cosh[R(x+\lambda t)+\zeta_0]\,\mathrm{csch}^2\{\frac{1}{2}[R(x+\lambda t)+\zeta_0]\},\\u(x,t)=\frac{1}{6}(30bR^2-6\lambda)-3bR^2\cosh[R(x+\lambda t)+\zeta_0]\,\mathrm{sech}^2\{\frac{1}{2}[R(x+\lambda t)+\zeta_0]\},\\u(x,t)=-5bR^2-\lambda+6bR^2\tan[R(x+\lambda t)+\zeta_0]\{\pm\sec[R(x+\lambda t)+\zeta_0]-\tan[R(x+\lambda t)+\zeta_0]\},\\u(x,t)=-5bR^2-\lambda+3bR^2\cos[R(x+\lambda t)+\zeta_0]\sec^2\{\frac{1}{2}[R(x+\lambda t)+\zeta_0]\}.\end{cases}\tag{16}$$

3 结束语

本文所给出的解均为含有任意常数的式(1)的显示精确解,当任意常数取特定值时,可得到不同特解,在式(11)的第一式中取 $m=3,a=2,b=-3,R=2,\zeta_0=0$ 和 $m=3,a=2,b=3,R=2,\zeta_0=0$ 时,分别得到拓扑孤立子和反拓扑孤立子,如下图1和图2.在式(9)的第一式中取 $m=3,a=$

$2, b = -1, R = 1, \zeta_0 = 0$ 得到一周期孤立子，如下图 3.

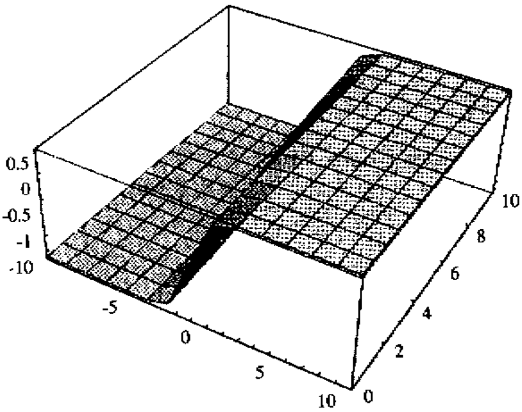

图 1　拓扑孤立子

Fig.1　Topotical solitary wave

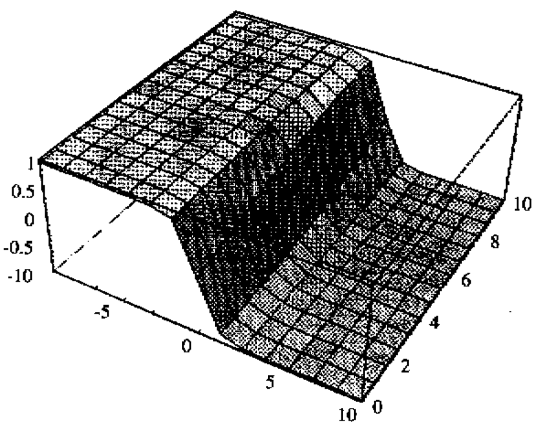

图 2　反拓扑孤立子

Fig.2　Antitoptical solitary wave

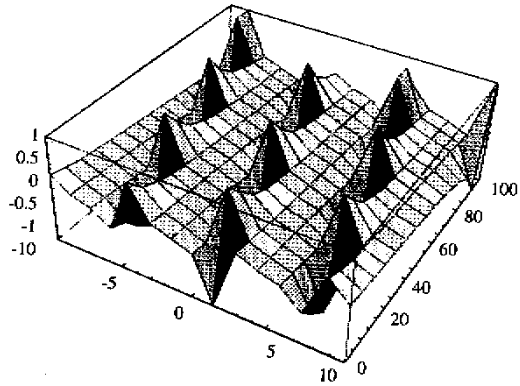

图 3　周期波

Fig.3　Periodic wave

本文得到的解均在 Mathematica 上得到验证，顺便指出，文献[3]中给出的解，经验证其中的一些不满足所给方程.

参考文献：

[1] KAKUTANI T, KAWAHARA T. A modified Kortweg – de Vries equation for ion acoustics wave in two – fluid plasma [J]. J Phys Soc Japan, 1970, 29: 1068 – 1073.

[2] ISIDORE Ndayirinde. Exact solutions of a nonlinear dispersive – dissipative equation [J]. J Phys A: Math Gen, 1996, 29: 3679 – 3682.

[3] 尚亚东．一个非线性色散 – 耗散方程的显示精确解[J]. 高校应用数学学报, 1999, 14(3): 280 – 284.

[4] YAN Zhen-ya, ZHANG Hong-qing. New explicit solitary wave solutions and periodic wave solutions for W-B-K equation in shallow water [J]. Phys Lett: A, 2001, 285: 355 – 362.

[5] 闫振亚，张鸿庆．非线性演化方程显示精确解的新算法[J]. 工科数学, 2000, 16(2): 40 – 43.

New Solitary Wave Solutions and Periodic Wave Solutions to a Nonlinear Dispersive – dissipative Equation

WANG Xia, WANG Shu – bin

(Department of Mathematics & Mechanics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: Truncated adjunct function method, a neat and efficient method in search of exact solutions to nonlinear partical differential equations, is briefly introduced. With the aid of Mathematica, some new solitary wave solutions, periodic wave solutions and stable solutions of a dispersive-dissipative equation, which describes weak nonlinear ion-acoustic waves in a plasma consisting of cold ions and wam electrons, are obtained by truncated adjunct function method. The solutions contain aleatoric constants. With the aid of Mathematica, a few figures of some solutions are given when aleatoric constants are given exact values.

Key words: solitary wave solution; periodic wave solution; computer algebra system