文章编号:1671-6833(2002)02-0106-04

复合材料有效弹性模量的上、下限的求解

杨大鹏,刘新田

(郑州大学材料工程学院,河南 郑州 450002)

摘 要: 计算复合材料有效弹性模量上、下限的方法中,Voigt 和 Reuss 的上、下限近似解及 Hashin 和 Shtrikman 的上、下限计算公式较为精确,但 Voigt—Reuss 近似解通常忽略了各向异性非均匀体的研究,是一个不全面的结果.而 Hashin 和 Shtrikman 未能准确运用变分法研究应变能的极值条件.针对各向异性非均匀体,采用变分法及能量极值原理进行分析,得出了一个比 Voight—Reuss 和 Hashin—Shtrikman 上、下限近似解更为精确和合理的上、下限计算公式.

关键词: 有效弹性模量;Voigt—Reuss;Hashin—Shtrikman;上限;下限

中图分类号: TB 301 **文献标识码:** A

求复合材料等效弹性模量的最为简单的方法是所谓的混合律[1],混合律的基础是 Voigt 的等应变假设与 Reuss 的等应力假设.Voigt 等应变假设认为,复合材料的各组分相中的应变是相等的,等于外加应变 ε_{ij}^0.Reuss 的等应力假设则认为,根据边界条件 $T_i(s)=\sigma_{ij}^0 n_j$,复合材料内的应力是均匀的,其值为 σ_{ij}^0.设复合材料的各组成相都是各向同性材料,给定远场应变为 ε_{ij}^0,由于 $C_{ijkl}^*\varepsilon_{kl}^0 = C_0\sigma_{ij}^{(0)}+\sum_{r=1}^{n}C_r\sigma_{ij}^{(r)}=C_{ijkl}^0\varepsilon_{kl}^0+\sum_{r=1}^{n}C_r(C_{ijkl}^{(r)}-C_{ijkl}^{(0)})\cdot\varepsilon_{kl}^{(r)}$,可得复合材料的有效体积模量 k_v^* 和剪切模量 G_v^* 为

$$K_v^* = \sum_{i=0}^{N} C_i K_i ; \tag{1}$$

$$G_v^* = \sum_{i=0}^{N} C_i G_i ; \tag{2}$$

式中:K_i,G_i,C_i 分别为第 i 相材料的体积模量、剪切模量、体积分数;N 为相的数目.在远场应力 σ_{ij}^0 的情况下,根据 Reuss 假设[2] 以及式 $S_{ijkl}^*\sigma_{kl}^0 = C_0\varepsilon_{ij}^{(0)}+\sum_{r=1}^{n}C_r\varepsilon_{ij}^{(r)}=S_{ijkl}^{(0)}\sigma_{kl}^0+\sum_{r=1}^{n}C_r(S_{ijkl}^{(r)}-S_{ijkl}^{(0)})\cdot\sigma_{kl}^{(r)}$,得

$$K_R^* = \left\{\sum_{i=0}^{N}\frac{C_i}{K_i}\right\}^{-1}; \tag{3}$$

$$G_R^* = \left\{\sum_{i=0}^{N}\frac{C_i}{G_i}\right\}^{-1}, \tag{4}$$

式中:K_R^*,G_R^* 分别为 Reuss 理论中多晶体的有效体积模量和剪切模量.Hall 根据弹性极值原理证明了式(1),(2)为多晶体有效体积模量和剪切模量的上限,公式(3),(4)为下限.同样,对于夹杂复合材料,Paul 根据最小势能和最小余能原理也证明了上述结论.

1 对 Voigt 和 Reuss 近似解对应于真实弹性解的上、下限的证明

根据位移边界条件 $u_i(s)=\varepsilon_{ij}^0 x_j$,复合材料代表性单元的内力势能为

$$\Pi = \frac{1}{2}C_{ijkl}^*\varepsilon_{ij}^0\varepsilon_{kl}^0 v . \tag{5}$$

由等应变假设,势能的 Voigt 近似值为

$$\Pi_v = \frac{1}{2}C_{ijkl}^v\varepsilon_{ij}^0\varepsilon_{kl}^0 v , \tag{6}$$

其中,

$$C_{ijkl}^v = \frac{1}{v}\int_v C_{ijkl}\,\mathrm{d}v = \sum_{r=0}^{N} C_r C_{ijkl}^{(r)} , \tag{7}$$

上标(r)代表复合材料的第 r 种组分.根据最小势能原理,有

$$\frac{1}{2}(C_{ijkl}^*-C_{ijkl}^v)\varepsilon_{ij}^0\varepsilon_{kl}^0 \leqslant 0, \tag{8}$$

因 ε_{ij}^0 任意性,于是

$$C_{ijkl}^* \leqslant C_{ijkl}^v . \tag{9}$$

同理,根据应力边界条件 $T_i(s)=\sigma_{ij}^0 n_j$,复合

收稿日期: 2001-12-02;**修订日期:** 2002-02-30

基金项目: 河南省自然科学基金资助项目(2000430010)

作者简介: 杨大鹏(1976—),男,河南省开封市人,郑州大学硕士研究生.

材料代表性单元的余能为

$$n_c = \frac{1}{2} S^{*}_{ijkl}\, \sigma^{0}_{ij}\, \sigma^{0}_{kl}\, v , \qquad (10)$$

在等应力假设下,余能的Reuss近似值为

$$n_R = \frac{1}{2} S^{R}_{ijkl}\, \sigma^{0}_{ij}\, \sigma^{0}_{kl}\, v , \qquad (11)$$

其中,

$$S^{R}_{ijkl} = \frac{1}{v}\int_v S_{ijkl}\, dv = \sum_{r=0}^{N} C_r S^{(r)}_{ijkl} , \qquad (12)$$

根据最小余能原理可得

$$S^{*}_{ijkl} \leqslant S^{R}_{ijkl} , \qquad (13)$$

即

$$C^{R}_{ijkl} \leqslant C^{*}_{ijkl} \leqslant C^{v}_{ijkl} , \qquad (14)$$

2　改进的多相复合材料有效弹性模量的上、下限

对于各向异性非均匀体,在Hashin和Shtrikman[3]的基础上,我们可以采用变分法研究应变能的极值条件.基本思想是:①选择一个几何形状和边界条件都相同的参考介质,该介质是各向同性的均匀体;②将非均匀体的位移场、应力场、弹性模量分解成相应的参考介质量和扰动量;③通过边界条件和内部的约束条件给出非均匀体应变能的极值条件.根据此思路,再次研究多相复合材料有效弹性模量的上、下限问题.

设有一n相统计均匀各向同性复合材料,它的第r相的体积与弹性模量分别为V_r与L_r($r=1, 2, \cdots, n$).取一均匀的各向同性比较材料,其弹性模量为L_0,它与上述复合材料都受到相同的远场均匀位移边界条件的作用.根据前面的讨论,只要在该比较材料中作用适当的分布体力,复合材料中的弹性场就可以在该比较材料中实现.假设上述位移边界条件下比较材料的应变场为ε,相应的满足自平衡条件的应力场为

$$\sigma^{*} = L_0 \varepsilon + \tau , \qquad (15)$$

式中,τ为应力极化张量,它与比较材料内的分布体力有关.显然,如果在第r相中极应力为$\tau=(L_r - L_0)\varepsilon$,上述应力与应变场$\sigma^*$与ε即为问题的精确解,否则与τ对应的$\sigma^*$与ε为近似场.一般来说,要得到精确的应力与应变场是不容易的,尤其是在除夹杂相的体积比率外,复合材料内部夹杂的具体分布形态未知的情况下更困难.此时可引入近似,假设极应力τ是分片均匀的,在体积V_r内,有

$$\tau = (L_r - L_0)\, \bar{\varepsilon}_r , \qquad (16)$$

其中,$\bar{\varepsilon}_r$为ε在V_r内的平均值.将式(16)代入式(15),在V_r内可以得到

$$\sigma^{*}_r = L_r \bar{\varepsilon}_r + L_0 \varepsilon'_r , \qquad (17)$$

其中:$\varepsilon'_r = \varepsilon - \bar{\varepsilon}_r$.

根据最小势能原理,对于任意给定的满足位移边界条件的应变场ε,

$$V_{势} = \frac{1}{2}\bar{\varepsilon} L \bar{\varepsilon} V \leqslant \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{N}\int_{v_r} \varepsilon L_r \varepsilon\, dv , \qquad (18)$$

式中:$\bar{\varepsilon}$为复合材料的平均应变;L是等效弹性模量.

根据虚功原理,存在

$$\frac{1}{2}\int_v \sigma^{*}(\bar{\varepsilon} - \varepsilon)\, dv = 0 ; \qquad (19)$$

$$\frac{1}{2}\bar{\varepsilon} L \bar{\varepsilon} V + \frac{1}{2}\int_v \sigma^{*}(\bar{\varepsilon} - \varepsilon)\, dv \leqslant \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N}\int_{v_r} \varepsilon L_r \varepsilon\, dv , \qquad (20)$$

又由式(17),得

$$\frac{1}{2}\bar{\varepsilon} L \bar{\varepsilon} V \leqslant \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} v_r \bar{\varepsilon} L_r \bar{\varepsilon}_r - \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{N} v_r \varepsilon'_r (L_0 - L_r)\, \varepsilon'_r\, dv , \qquad (21)$$

引入应变集中因子$\bar{A}_r$,使

$$\bar{\varepsilon}_r = \bar{A}_r \bar{\varepsilon} , \qquad (22)$$

显然

$$\sum_{r=1}^{N} C_r \bar{A}_r = I , \qquad (23)$$

式中,I为单位张量.

于是式(21)可表示为

$$\bar{\varepsilon}(L - \bar{L})\, \bar{\varepsilon} \leqslant -\frac{1}{v}\sum_{r=1}^{N}\int_{v_r} \varepsilon'_r (L_0 - L_r)\, \varepsilon'_r\, dv , \qquad (24)$$

$$\bar{L} = \sum_{r=1}^{N} C_r L_r \bar{A}_r , \qquad (25)$$

若L_0足够大,使$L_0 - L_r$($r=1, 2, \cdots, n$)半正定,则恒有$L \leqslant \bar{L}$;若L_0足够小,$L_0 - L_r$半负定,则$L \geqslant \bar{L}$.

对于在近似极应力τ场下复合材料的应变ε,由于σ^*是自平衡的应力场,由式(15)可知,求解ε所对应的位移场即相当于求解在比较材料内作用有分布体力$\tau_{ij,j}$的问题.将与近似场τ对应的位移记为$\hat{u}$,利用各向同性材料的Kelvin格林函数解$G_{ij}(x, x')$,可以将$\hat{u}$记成

$$\hat{u}_i(x) = \int_v G_{ij}\, \tau_{jk,k}\, dv , \qquad (26)$$

与此同时,为确保外部的位移边界条件能得到满足,需要在与$\hat{u}_i$对应的近似应变场上叠加一均匀的应变场ε^I,使

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\hat{u}_{i,j} + \hat{u}_{j,i}) + \varepsilon^I_{ij} , \qquad (27)$$

将分片均匀的极应力场 τ 代入到式(26),(27)中,经过一系列运算,得

$$\bar{\varepsilon}_r = -P_0\tau_r + \varepsilon^I = P_0(L_0 - L_r)\bar{\varepsilon}_r + \varepsilon^I; \quad (28)$$

$$P_0 = (L_0^* + L_0)^{-1}; \quad (29)$$

$$L_0^* = K_0^*\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu_0^*\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{kl}\right), \quad (30)$$

式中:

$$K_0^* = \frac{4}{3}\mu_0,\ \mu_0^* = \left(\frac{1}{\mu_0} + \frac{10}{9K_0 + 8\mu_0}\right)^{-1}, \quad (31)$$

式中:K_0 与 μ_0 为比较材料的体积弹性模量与剪切模量.

由式(28)可得

$$\bar{\varepsilon}_r = A_r\varepsilon^I, \quad (32)$$

其中:

$$A_r = [\mathrm{I} + P_0(L_0 - L_r)]^{-1}. \quad (33)$$

于是,复合材料的体平均应变

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{r=1}^{N} C_r\bar{\varepsilon}_r = \sum_{r=1}^{N} C_r A_r\varepsilon^I, \quad (34)$$

由此得

$$\varepsilon^I = \left(\sum_{r=1}^{N} C_r A_r\right)^{-1}\bar{\varepsilon}; \quad (35)$$

$$\bar{\varepsilon}_r = A_r\left(\sum_{r=1}^{N} C_r A_r\right)^{-1}\bar{\varepsilon}.$$

由 $\bar{\varepsilon}_r = \bar{A}_r\bar{\varepsilon}$,得

$$\bar{A}_r = A_r\left(\sum_{r=1}^{N} C_r A_r\right)^{-1}, \quad (36)$$

由 $\bar{L} = \sum_{r=1}^{N} C_r L_r \bar{A}_r$,可以得出

$$\bar{L} = \sum_{r=1}^{N} C_r L_r A_r\left(\sum_{r=1}^{N} C_r A_r\right)^{-1} =$$

$$\sum_{r=1}^{N} C_r(L_r^* + L_r)A_r\left(\sum_{r=1}^{N} C_r A_r\right)^{-1} - L_0^*; \quad (37)$$

又因 $P_0 = (L_0^* + L_0)^{-1}$ 和 $A_r = [\mathrm{I} + P_0(L_r - L_0)]^{-1}$,可证出

$$(L_0^* + L_r)A_r = L_0^* + L_0; \quad (38)$$

$$\bar{L} = \left[\sum_{r=1}^{N} C_r(L^* + L_r)^{-1}\right]^{-1} - L_0^*. \quad (39)$$

各向同性组分材料的弹性常数张量 L_0 和 L_r 可以由其体积弹性模量和剪切弹性模量 K_0, μ_0 与 K_r, μ_r 来表示[4,5].若我们取 K_0 等于各相材料中 K_r 的最大值,即 K_{max}, μ_0 为各相材料中 μ_r 的最大值 μ_{max},则由式 $\bar{L} = \left[\sum_{r=1}^{N} C_r(L_0^* + L_r)^{-1}\right]^{-1} - L_0^*$ 可解得复合材料的等效体积弹性模量 K 与等效剪切模量 μ 的上限值为

$$K \leqslant \left[\sum_{r=1}^{N} C_r(K_0^* + K_r)^{-1}\right]^{-1} - K_0^*; \quad (40)$$

$$\mu \leqslant \left[\sum_{r=1}^{N} C_r(\mu_0^* + K_r)^{-1}\right]^{-1} - \mu_0^*, \quad (41)$$

式中:

$$K_0^* = \frac{4}{3}\mu_{max},\quad \mu_0^* = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{\mu_{max}} + \frac{10}{9K_{max} + 8\mu_{max}}\right).$$

同理,若取 K_0 与 μ_0 分别等于复合材料各相中最小的 K_r 与 μ_r 的值,即 $K_0 = K_{max}$,与 $\mu_0 = \mu_{min}$,于是得 K 与 μ 之下限值

$$K \geqslant \left[\sum_{r=1}^{N} C_r(K_0^* + K_r)^{-1}\right]^{-1} - K_0^*; \quad (42)$$

$$\mu \geqslant \left[\sum_{r=1}^{N} C_r(\mu_0^* + \mu_r)^{-1}\right]^{-1} - \mu_0^*; \quad (43)$$

式中:

$$K_0^* = \frac{4}{3}\mu_{min},\quad \mu_0^* = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\mu_{min}} + \frac{10}{9K_{min} + 8\mu_{min}}\right).$$

3 结束语

式(40),(41),(42),(43)是根据极值原理并采用格林函数和势函数推导的改进的上、下限计算公式,与Voigt—Reuss 和Hashin—Shtrikman 上、下限相比,精度大为提高,是目前较为理想的计算复合材料有效弹性模量的上、下限公式.

参考文献:

[1] 范赋群,王震鸣,嵇 醒,等.关于复合材料力学几个基本问题的研究[J].力学与实践,1995,17:4—7.

[2] 汤任基.裂纹柱的扭转理论[M].上海:上海交通大学出版社,1996.

[3] 梁 军.一种含夹杂和微裂纹分布复合材料的弹性常数预报方法[J].复合材料学报,1997,14(3):102—108.

[4] ZHAO Y H, WENG G J. Effective elastic moduli of ribbon—rainforced composites[J]. J Appl Mech, 1990, 57(5):158—167.

[5] 吴林志,石志飞.含夹杂复合材料宏观性能研究[J].力学进展,1995,25:410—423.

Calculation of the Upper Limit or Lower Limit of Efficacious Modulus of Elasticity of Compound Materials

YANG Da-peng, LIU Xin-tian

(College of Materials Engineering, Zhengzhou Universtiy, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: At present, the approximate solution of Voigt and Reuss's upper limit or lower limit and the calculating formula of Hashin and Shtrikman's upper limit or lower limit are accurate. They are always utilized and adopted by materials science researcher. But the study of non-well-distributed substance of differency in nature in every direction has been ignored in the approximate solution of Voigt and Reuss, and as a result, it is not a overall conclusion. And Hashin and Shtrikman have not precisely wield calculus of variations to discuss the extreme value conditions of strain enery. In this paper, we apply calculus of variations and energy extreme value principle to analysis, primarily aiming at non-well-distributed substance of differency in nature. And we have acquired an improved calulating formula which is more accurate and more reasonable than Voigt-Reuss and Hashin-Shritman calculating formula.

Key words: efficacious modulus of elasticity; Voigt-Reuss; Hashin-Shtrikman; upper limit; lower limit

---

河南省教育科研网高速主干网开通

4月6日，主要由郑州大学承建的河南省教育科研计算机网高速主干网正式开通.

河南省教育科研计算机网是中国教育和科研计算机网在河南省的省级网络，其网络中心设在我校，主要负责我省大、中、小学的校园网及其他教育科研单位与中国教育和科研计算机网互联.截至2001年底，已在郑州、开封、洛阳、新乡、焦作、许昌、平顶山7个省辖市建立高速主干网.目前全省有40多所大学、中小学等教育和科研单位接入河南教育科研网，通过该网可提供基于宽带技术的实时双向交互式远程教学等多种教育模式，现有50万户享受到该网的宽带网络教育资源.这在省级教育科研计算机网络建设方面走在了全国的前列.

国家教育部科技司副司长袁成深出席了高速主干网开通仪式.4月6日下午，袁司长在我校曹策问校长的陪同下来到我校网络管理中心，观摩了现代远程教育远程教学演示.

据悉，河南省教育科研计算机网主干网二期工程，将以高速宽带网络连接全省所有省辖市.