文章编号:1007-6492(2002)01-0049-03

判断矩阵一致性修正的模糊距离和贴近度法

周 丽,吴泽宁,王海政,陈忠平

(郑州大学环境与水利学院,河南 郑州 450002)

摘 要:利用模糊理论中距离和贴近度的概念来衡量判断矩阵各列向量与排序权重向量的接近程度,从接近程度最差的向量着手,找出对判断矩阵一致性影响最大的元素,利用一致性互反矩阵的一些性质,对其和其对称元素进行修正;编写了改进判断一致性相应的计算机程序,使改进更方便.实例研究表明,该方法能较有效地提高判断矩阵的一致性,且简单易行.

关键词:贴近度;判断矩阵;一致性

中图分类号:O 159 **文献标识码**:A

层次分析法(AHP)是70年代中期提出的一种用于多目标决策的方法,已被广泛应用于各个领域.AHP的关键是构造判断矩阵,判断矩阵的一致性决定矩阵的特征向量是否如实反映各方案的排序权重.当一致性不满足要求时,势必存在调整判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的要求.目前有不少较为有效的修正方法,有的利用平均特性得到的修正矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 代替原矩阵 $\boldsymbol{A}$,有的是依据一定方法找出导致一致性较差的元素并对其进行修改[1,2].总的说来,依据一定原则对 $\boldsymbol{A}$ 进行部分甚至全部元素的修改.综合已有的方法,不难看出其存在有对 $\boldsymbol{A}$ 改动的元素太多或修改具有一定的随意性等不足,不利于坚持决策者的原始判断,同时也不一定必须修改所有的元素.本文基于模糊数学中距离和贴近度的概念,提出一种改进判断矩阵的一致性的方法,可在一定程度上克服以上不足.

1 判断矩阵的一致性概念及其检验

1.1 判断矩阵的一致性及其性质

定义1 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 称为正互反矩阵[3],若其元素 $a_{ij}>0$;$a_{ij}=\dfrac{1}{a_{ji}}$;$a_{ii}=1$,$(i,j=1,\cdots,n)$.

定义2 n 阶正互反矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 称为一致性矩阵[2],若其元素 $a_{ij}=a_{ik}\times a_{kj}$,$(i,j=1,\cdots,n,\ \forall k\in[1,n])$.

由定义1,2易得 $a_{ij}=\dfrac{a_{ik}}{a_{jk}}$,$a_{ji}=\dfrac{a_{ki}}{a_{kj}}$.当 i,j 固定,k 变动时,易知 i 行(列)和 j 行(列)对应元素成比例.

推论 $n\times n$ 阶正互反矩阵,它的任意两行(列)对应元素成比例.

设 $\boldsymbol{A}$ 正互反一致性矩阵的最大特征根为 λ_{max},对应的归一化特征向量为 $\boldsymbol{W}=(w_1,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$,则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有以下一些性质:①$(a_{ij})_{n\times n}=(\dfrac{w_i}{w_j})_{n\times n}$;②若 $\boldsymbol{A}$ 一致,则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 也一致;③$\boldsymbol{A}$ 的每一行(列)均为任意另一行(列)的倍数;④$\boldsymbol{A}$ 的最大特征根为 n,其余均为0;⑤$\boldsymbol{A}$ 的最大特征根对应的归一化特征向量就是排序权向量.

1.2 判断矩阵的一致性检验及修正思想

1.2.1 判断矩阵的一致性检验

实际应用中,由于问题本身的复杂性及专家的偏爱和失误,得到的判断矩阵一般总不一致,所以有必要对判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一致性进行检验.设 $\boldsymbol{A}$ 为判断矩阵,λ_{max} 为最大特征根,n 为阶数,检验过程如下:① 计算一致性指标 $C.I=\dfrac{\lambda_{max}-n}{n-1}$;② 查找相应的平均随机一致性指标 $R.I$;③ 计算一致性比例 $C.R=\dfrac{C.I}{R.I}$.当 $C.R<0.1$ 时,称判断矩阵具有满意一致性.实践中往往只要求判断矩阵的一致性在一定范围内,即达到满意一致性,可用判断矩阵最大特征根对应的归一化的特征向量作为排序权向量的一个估计[3].

1.2.2 判断矩阵的一致性修正思想

收稿日期:2001-09-11;**修订日期**:2001-12-18

基金项目:2000年河南省杰出青年科学基金资助项目;河南省自然科学基金资助项目(00404600)

作者简介:周丽(1976-),女,湖北省武汉市人,郑州大学硕士研究生,主要从事工程经济及水资源系统分析.

当判断矩阵连满意一致性的要求也达不到时,需要对原判断矩阵进行修正调整.应本着尽量利用原判断矩阵的信息,且改动元素越少越好的原则,使判断矩阵变化不大,一致性又达到要求.

由定义2知,原判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某一元素 a_{ij} 对应的第 i 行和第 j 行 n 对元素对应之比 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 和 a_{ij} 的关系有以下两种情况:①当 $\boldsymbol{A}$ 是完全一致性矩阵时,$\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_n=a_{ij}$;②当 $\boldsymbol{A}$ 不是完全一致性矩阵时,$\beta_1,\cdots,\beta_n$ 与 a_{ij} 不一定相等,这说明决策者在判断中前后不一致,存在某些失误,a_{ij} 不是真实值,但 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 能大体反映真实值的大小,采用平均值作为真实值的近似来修正 $\boldsymbol{A}$ 中的 a_{ij},使 $\boldsymbol{A}$ 的一致性得以提高.记 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的平均值为 $a_{ij}^*=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{ik}}{a_{jk}}$,同理 $a_{ji}^*=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{jk}}{a_{ik}}$,若用 a_{ij}^* 和 a_{ji}^* 分别修正 $\boldsymbol{A}$ 中的 a_{ij} 和 a_{ji} 以后,由正互反性,应有 $a_{ij}^*=\frac{1}{a_{ji}^*}$,为此可取平均近似,记 $a_{ij}^{**}=\frac{1}{2}(a_{ij}^*+\frac{1}{a_{ji}^*})=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{ik}}{a_{jk}}+\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{jk}}{a_{ik}}})$,$a_{ji}^{**}=\frac{1}{a_{ij}^{**}}$,用 a_{ij}^{**} 和 a_{ji}^{**} 来代替原判断矩阵的 a_{ij} 和 a_{ji}.

为了提高判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一致性,可以只修正对一致性干扰较大的几个元素.对完全一致性矩阵 $\boldsymbol{A}$,有 $a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}$,易知 $\boldsymbol{A}$ 的各列归一化向量 $\boldsymbol{e}_i$($\boldsymbol{e}_i=(e_i^1,\cdots,e_i^n)^{\mathrm{T}},i=1,\cdots,n$)等于对应主特征根的归一化特征向量 $\boldsymbol{W}$,即 $\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2=\cdots=\boldsymbol{W}$;当 $\boldsymbol{A}$ 不满足一致性时,这 n 个向量与 $\boldsymbol{W}$ 不严格相等,而是在 $\boldsymbol{W}$ 附近波动.因此 $\boldsymbol{e}_i$ 与 $\boldsymbol{W}$ 的接近程度反映了矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一致性.与 $\boldsymbol{W}$ 贴近程度越差的向量所对应 $\boldsymbol{A}$ 中的列对 $\boldsymbol{A}$ 的一致性干扰越大,因此修正应从此列着手.为度量 $\boldsymbol{e}_i$ 与 $\boldsymbol{W}$ 的贴近程度,借用模糊距离和贴近度的思想,找出对 $\boldsymbol{A}$ 的一致性干扰最大的元素进行修正.

2 模糊距离和贴近度

设 $\boldsymbol{X}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{Y}=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$ 是两向量,且 $x_i,y_i>0$,令

$$\begin{cases} d(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{|x_i-y_i|}{\max(x_i,y_i)}; \\ \sigma(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})=1-d(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}), \end{cases} \quad (1)$$

由模糊距离和贴近度一般性定义[4],易证 $d(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 和 $\sigma(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 满足定义要求.模糊集可以用向量表示,当两个向量越接近,它们之间的距离越小,贴近度越大.同时从 $d(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 的定义中可看出,两向量的距离可看作其分量距离的平均值,因此定义两个数的距离和贴近度如下

$$\begin{cases} d(x,y)=\dfrac{|x-y|}{\max(x,y)}; \\ \sigma(x,y)=1-d(x,y). \end{cases} \quad (x,y\in R^+) \quad (2)$$

根据距离和贴近度思想,可以求出判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中对一致性影响最大的元素.利用 $d(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 和 $\sigma(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ 定义,求得各 e_i 与 $\boldsymbol{W}$ 的距离 d_i 和贴近度 σ_i,即

$$\begin{cases} d_i=d(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{W})=\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\dfrac{e_i^j-w_j}{\max(e_i^j,w_j)}; \\ \sigma_i=\sigma(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{W})=1-d(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{W}), \\ \qquad (i=1,\cdots n) \end{cases} \quad (3)$$

$d_i,\sigma_i\in[0,1]$ 反映的是 $\boldsymbol{e}_i$ 与 $\boldsymbol{W}$ 的接近程度,利用平均的概念可表示整体的一致性程度.定义平均贴近度 $c=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i$.判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 完全一致时,$d_i=0$,$\sigma_i=1$,$c=1$;不完全一致时,$d_i>0$,$\sigma_i<1$,$c<1$.d_i 越大,σ_i,c 越小,$\boldsymbol{e}_i$ 与 $\boldsymbol{W}$ 的贴近程度越差.设 $d_L=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(d_i)$,由两个数的距离和贴近度定义,计算贴近程度最差的 e_L 各分量与 $\boldsymbol{W}$ 各分量的距离 d_{Li} 和贴近度 σ_{Li},即

$$\begin{cases} d_{Li}=d(e_L^i,w_i)=\dfrac{|e_L^i-w_i|}{\max(e_L^i,w_i)}; \\ \sigma_{Li}=\sigma(e_L^i,w_i)=1-d(e_L^i,w_i), \end{cases} \quad (i=1,\cdots,n)$$
$$(4)$$

从 d_{Li} 中找出分量贴近程度最差的元素 $d_{LH}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(d_{Li})$,可知 $\boldsymbol{e}_L$ 中第 H 个元素对 $\boldsymbol{A}$ 的一致性影响最大,应修正 e_L^H 对应的 $\boldsymbol{A}$ 中的 a_{HL}.

3 校正步骤

(1) 原始判断矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过迭代法计算出主特征值 $\lambda_{\max}$,$\boldsymbol{W}$ 和一致性检验指标C.R.

(2) 当C.R<0.1结束,否则按以下步骤进行.

(3) 将 $\boldsymbol{A}$ 的各列归一化得向量 $\boldsymbol{e}_i$,由式(3)算出 d_i 和 σ_i($i=1,\cdots,n$).

(4) 找出 d_i 中最大者 d_L 对应的 $\boldsymbol{e}_L$,由式(4)计算分量距离 d_{Li},找出最大者 d_{LH},对应的行和列.

(5) 在尽量依据原判断矩阵的信息和少改动元素的原则下,可令 $a_{HL}^{**}=\frac{1}{2}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{Hk}}{a_{Lk}}+$

$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{Lk}}{a_{Hk}}}$) 来代替 a_{HL}，为保证矩阵的正互反性，同时也应修改 a_{LH} 为 $\frac{1}{a_{HL}^{**}}$，这样经过修正后的判断矩阵一致性有所改进. 返回(1) 重复上述步骤.

4　算例

解决某工程问题时，得判断矩阵

$$A^0=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1/3 & 5\\ 1 & 3 & 1 & 6\\ 1/2 & 1/5 & 1/6 & 1\end{bmatrix},$$

用程序算出校正前 $\lambda_{max}^0=4.3474$，$C\cdot R^0=0.1301$，$W^0=(0.2143,0.2768,0.4384,0.0704)^T$.

第 1 次校正：A^0 各列归一化向量 e_i 与 W^0 的贴近度 $\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 分别为 $(0.6821,0.6389,0.7127,0.8512)^T$；与 W^0 距离最大、贴近度最小的向量为 e_2，对应 A^0 的第 2 列，即 $L=2$；e_2 与 W^0 的各元素的距离 $d_{2i}(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $(0.5037,0.231,0.3132,0.3955)^T$，最大值为第 1 个，即 $H=1$. 所以应修正 A^0 中第 1 行第 2 列的 0.5 为 0.8427，第 2 行第 1 列的 2 为 1.1867. 校正结果为 $\lambda_{max}^1=4.2699$，$C\cdot R^1=0.1011$，$W^1=(0.2426,0.2463,0.4367,0.0744)^T$.

修正后的判断矩阵为

$$A^1=\begin{bmatrix}1 & 0.8427 & 1 & 2\\ 1.1867 & 1 & 1/3 & 5\\ 1 & 3 & 1 & 6\\ 1/2 & 1/5 & 1/6 & 1\end{bmatrix}.$$

第 2 次校正：A^1 各列归一化向量 e_i 与 W^1 的贴近度 $\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 分别为 $(0.7073,0.6903,0.7399,0.8049)^T$；与 W^1 距离最大、贴近度最小的向量为 e_2，对应 A^1 的第 2 列，即 $L=2$；e^2 与 W^1 的各元素的距离 d_{2i} 为 $(0.3110,0.1949,0.2659,0.4670)^T$，最大值为第 4 个，即 $H=4$. 应修正 A^1 中第 4 行第 2 列的 0.2 为 0.3043，第 2 行第 4 列的 5 为 3.2862. 校正结果为 $\lambda_{max}^2=4.2034$，$C\cdot R^2=0.0762$，$W^2=(0.2493,0.2239,0.4435,0.0833)^T$.

修正后的判断矩阵为

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 0.8427 & 1 & 2\\ 1.1867 & 1 & 1/3 & 3.2862\\ 1 & 3 & 1 & 6\\ 1/2 & 0.3043 & 1/6 & 1\end{bmatrix}.$$

此时 $C\cdot R^2<0.1$ 满足满意一致性要求，最终计算结果为第二次修正后的结果.

5　结束语

本文提出的改进判断矩阵一致性的方法，简单实用，既充分依据决策者的原始判断，又能有效的减少改动元素的个数，且尽量减小元素数值变动的幅度. 当判断矩阵的一致性太差时，多次修正以后还达不到满意一致性时，说明原判断严重失误，应重新判断.

参考文献：

[1] 刘万里，雷治军. 关于 AHP 中判断矩阵校正方法的研究[J]. 系统工程理论与实践，1997，17(6)：30～34.

[2] 吴祈宗，李有文. 层次分析法中矩阵判断一致性研究. 北京理工大学学报[J]，1999，19(4)：502～505.

[3] 王莲芬，许树柏. 层次分析法引论[M]. 北京：中国人民大学出版社，1990.

[4] 韩立岩，汪培庄. 应用模糊数学[M]. 北京：首都经济贸易出版社，1998.

[5] 张晨光，吴泽宁. 层次分析法(AHP) 比例标度的分析与改进[J]. 郑州工业大学学报，2000，21(2)：85～87.

Method of the Fuzzy Distance and Applicability to Improve the Consistency of the Judgment Matrix

ZHOU Li，WU Ze-ning，WANG Hai-zheng，CHEN Zhong-ping

(College of Environmental & Hydraulic Engineering，Zhengzhou University，Zhengzhou 450002，China)

Abstract：Using the definition of distance and applicability in Fuzzy theory，the consistency between the column vector and weight vector of the judgment matrix can be calculated. The vector of the worst consistency can be adjusted by means of some characteristics of the consistent reciprocal matrix. And a computer program has been given，which can be used to improve the consistency of the judgment matrix. According to the examples，the method put forward in this essay is easy and effective.

Key words：applicability；judgment matrix；consistency