2001年 12月
第22卷 第4期
郑州工业大学学报
Journal of Zhengzhou University of Technology
Dec. 2001
Vol.22 No.4

文章编号:1007-6492(2001)04-0043-02

投资组合均值-方差准则的新解法

沈根祥

(上海财经大学经济学院,上海 200083)

摘 要:对资产组合理论的均值-方差准则的 Lagrange 求解方法进行分析,指出由于 Lagrange 法只给出极值点存在的必要条件,采用该求解方法证明收益一定时方差最小投资组合的存在性存在缺陷.以矩阵为分析工具,将限制条件用线性方程组解的广义逆矩阵形式表示,通过线性方程组解的理论,给出均值-方差准则的一种新解法.

关键词:资产组合;均值-方差准则;矩阵
中图分类号:O 221.2 文献标识码:A

0 引言

现代金融经济学的一个主要课题是确定风险与相应的风险补偿——超额收益之间的关系.在常识水平上,人们都认为股票之类的风险投资应该比无风险投资有更高的报酬,只有在 Markowitz 提出资产组合理论并在此基础上发展出资本资产定价模型时,风险和风险补偿之间的定量关系研究才有所突破.因此可以说现代财务理论是从 Markowitz 的资产组合理论开始的.

Markowitz 将金融市场中每个证券的价格(或收益率)看作一个随机变量,参与投资组合的证券价格(或收益率)形成一个随机向量,用随机向量的数学期望和方差-协方差矩阵分别刻画证券的收益水平和风险水平,给出资产投资组合的均值-方差准则.

准则Ⅰ:在给定的期望收益下,最小化资产组合的方差;准则Ⅱ:在给定方差下,最大化资产组合的期望收益.一般情况下,准则Ⅰ和准则Ⅱ是等价的[1].

引入符号,将问题模型化.设金融市场中 n 种资产的价格(或收益率)为随机变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,其数学期望为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$.记 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$;$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)'$,用 $\boldsymbol{\Omega}$ 表示 X 的方差-协方差矩阵,$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)'$ 表示一个资产组合,则对应的资产组合收益为 $\omega' x$,其数学期望和方差为

$$E(\omega' x)=\omega'\mu;\mathrm{Var}(\omega' x)=\omega'\boldsymbol{\Omega\omega},$$

考虑到 $\boldsymbol{\omega}$ 作为一个资产组合要满足条件

$$\sum^{n=i=1}\omega_i=1,$$

引入向量 $\boldsymbol{l}=(1,1,\cdots,1)'$,将该条件表示成

$$\omega'\boldsymbol{l}=l'\boldsymbol{\omega}=1.$$

这样,均值-方差准则表示为

$$\text{准则 Ⅰ}\quad\begin{cases}\min\limits_{\omega}\omega'\boldsymbol{\Omega\omega};\\ \text{s.t. }\omega'\mu=r_p;\\ \omega'\boldsymbol{l}=1;\end{cases}\qquad(1)$$

$$\text{准则 Ⅱ}\quad\begin{cases}\max\limits_{\omega}\omega'\boldsymbol{R};\\ \text{s.t. }\omega'\boldsymbol{\Omega\omega}=r_p;\\ \omega'\boldsymbol{l}=1.\end{cases}\qquad(2)$$

1 准则求解的 Lagrange 法

准则Ⅰ,Ⅱ求解时,现有做法都采用 Lagrange 乘子法,通过构造拉氏函数求其驻点而求解.以线性约束条件的准则Ⅰ为例[2].

构造 Lagrange 函数

$$\boldsymbol{L}=\omega'\boldsymbol{\Omega\omega}+2\varphi_1(r_p-\omega'\boldsymbol{\mu})+2\varphi_2(1-\omega'\boldsymbol{l}),\qquad(3)$$

式中:φ_1,φ_2 为 Lagrange 乘子.$\boldsymbol{L}$ 对 $\boldsymbol{\omega}$ 求导并令导数等于0,可得

$$2\boldsymbol{\Omega\omega}-2\varphi_1\boldsymbol{\mu}-2\varphi_2\boldsymbol{l}=0,$$

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\varphi_1\boldsymbol{\mu}+\varphi_2\boldsymbol{l}),\qquad(4)$$

代入约束条件求出参数 δ_1,δ_2,再代入式(4),得

收稿日期:2001-09-10;修订日期:2001-10-11
作者简介:沈根祥(1964-),男,河南省许昌市人,上海财经大学副教授,博士研究生,主要从事资本市场计量经济学方面的研究.

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{(C - Br_p)}{\Delta}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{l} + \frac{(Ar_p - B)}{\Delta}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu}, \tag{5}$$

其中，

$$A = l'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{l};\ B = l'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu};\ C = \mu'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu};$$
$$\Delta = AC - B^2.$$

对应于该资产组合的方差为

$$\sigma_p^2 = \omega'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\omega} = \frac{A}{\Delta}\left(r_p - \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{1}{A}. \tag{6}$$

Lagrange 法的缺陷在于，求出 Lagrange 函数的驻点后，驻点是否为极值点并未进一步讨论. 尽管在许多情况下由于驻点的唯一性和问题的实际意义，驻点就是极值点，但理论上仍有不完善之嫌. 下面以矩阵为工具，给出另一种求解方法.

2　准则的另一种解法

由于准则Ⅰ，Ⅱ的等价性，我们只对带线性约束的准则Ⅰ进行分析. 准则Ⅰ的约束条件有两个：$l'\boldsymbol{\omega} = 1$；$\mu'\boldsymbol{\omega} = r_p$（$r_p$ 为指定收益率）.

令矩阵

$$\underset{2\times n}{\boldsymbol{Z}} = \begin{bmatrix} l' \\ \mu' \end{bmatrix},\quad \underset{2\times n}{\boldsymbol{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ r_p \end{bmatrix}$$

则约束条件可表示成线性方程形式

$$\boldsymbol{Z\omega} = \boldsymbol{b}. \tag{7}$$

在资产组合理论中，资产价格（或收益率）随机向量的方差 – 协方差矩阵是正定的（记为 $\boldsymbol{\Omega} > 0$），因此 $\boldsymbol{\Omega}^{1/2}$，$\boldsymbol{\Omega}^{-1/2}$均有意义. 作变换

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega}^{1/2}\boldsymbol{\omega}, \tag{8}$$

因此

$$\omega'\boldsymbol{\Omega\omega} = \omega'\boldsymbol{\Omega}^{1/2}\boldsymbol{\Omega}^{1/2}\boldsymbol{\omega} = v'\cdot\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|^2,$$

$\|\cdot\|$ 代表向量的长度. 再令

$$\boldsymbol{Z\Omega}^{1/2} = \boldsymbol{Y},$$

这样，准则Ⅰ就变为

$$\min_{Yv=b} = \|\boldsymbol{v}\|^2, \tag{9}$$

即求方程 $Yv = b$ 的解使 $\|\boldsymbol{v}\|^2$ 达到极小解.

根据方程组解的理论[3]，方程 $Yv = b$ 的通解为 $\boldsymbol{v}\boldsymbol{Y}^+\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Y}^+\boldsymbol{Y})\boldsymbol{u}$，$u \notin \boldsymbol{R}^n$，为任一 n 维向量. 而使 $\|\boldsymbol{v}\|^2$ 达到极小的解为

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Y}^+\boldsymbol{b},$$

其中，Y^+ 代表矩阵 Y 的加号（“+”）广义逆. 因此，式(5)的解为 $\boldsymbol{v} = Y^+\boldsymbol{b}$.

下面通过计算 Y^+ 求出 $\boldsymbol{v}$ 进而求出 $\boldsymbol{\omega}$.

由

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Z\Omega}^{-1/2} = \begin{bmatrix} l'\boldsymbol{\Omega}^{-1/2} \\ \mu'\boldsymbol{\Omega}^{-1/2} \end{bmatrix},$$

得

$$(\boldsymbol{YY'})\boldsymbol{I}_{2\times2}\begin{bmatrix} l'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{l} & l'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu} \\ \mu'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{l} & \mu'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix},$$
$$|\boldsymbol{YY'}| = \Delta,$$

由于 $\boldsymbol{\mu}$ 代表不同证券的收益向量，从而假设的各分量不全相等是合理的，这时（YY'）可逆，并且

$$\boldsymbol{Y}^+ = \boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{YY'})^{-1},$$

由 Schwartz 不等式知 $\Delta > 0$. 计算逆矩阵得

$$(\boldsymbol{YY'})^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} C & -B \\ -B & A \end{bmatrix},$$

因此

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Y}^+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Y}'(\boldsymbol{YY'})^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{\Delta}\boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}(\boldsymbol{l}\ \boldsymbol{\mu})$$
$$\begin{bmatrix} C & -B \\ -B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ r_p \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}[(C - r_pB)\boldsymbol{l} + (r_pA - B)\boldsymbol{\mu}],$$

所以

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{v} = \frac{1}{\Delta}\boldsymbol{\Omega}^{-1}[(C - Br_p)\boldsymbol{l} + (Ar_p - B)]\boldsymbol{\mu}$$
$$= \frac{(C - Br_p)}{\Delta}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{l} + \frac{(Ar_p - B)}{\Delta}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\mu}, \tag{10}$$

对应于该资产组合的方差为

$$\sigma_p^2 = \omega'\boldsymbol{\Omega\omega} = \frac{1}{\Delta}\left(r_p - \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{1}{A}. \tag{11}$$

得到的结果与 Lagrange 法得到的结果（即式(5)，(6)）完全相同.

由于准则Ⅱ的约束条件为二次型，处理较为困难. 但由于准则Ⅰ，Ⅱ的等价性，此方法在证明准则Ⅰ的同时，也就证明了准则Ⅱ.

参考文献：

[1]　刘树成，沈　沛. 中国资本市场前沿[M]. 北京 社会科学文献出版社，2000.

[2]　CAMPBELL J Y，LO A W，MACKINLAY A C. The Econometrics of Financial Markets[M]. Princeton：Princeton University Press，1997.

[3]　张尧庭. 多元统计分析引论[M]. 北京 科学出版社，1999.

（下转 48 页）

On the Mechanism Design of the Strategic Alliance

ZHANG Shu - yi, ZHAO Dong - mei, LI Qiang

(School of Business & Administration, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: Strategic alliance, as a new organizational renovation, is a new Co - opetition form among the firms, its revenue distribution is always a key problem during the formation and running. This paper probes into the mechanism design, which also is the aim of paper, of the strategic alliance with the "core" concept of the cooperation game theory, and comes the conclusion that the (0,1) alliance that is a wining or losing game who have a veto, and those called the equilibrium alliance in which all sum of produce of sub - alliance's (if formed) value and their weighted right no more than the grand alliance, could assure the members satisfying the distribution result.

Key words: strtegic alliance; distribution; core; game theory

(上接44页)

A New Approach to the Model of Mean - variance Criteria

SHEN Gen - xiang

(School of Economics, Shanghai University of Finance & Economics, Shanghai 200083, China)

Abstract: Analyzing the Lagrange's approach to the mean - variance criteria, the paper turns out that the drawback of Lagrange's approach mainly lies in it's necessary rather than full condition for the existence of extreme - value point. By means of theory of matrix and linear equations, a new method of solving mean - variance criteria is given.

Key words: portfolio; mean - variance criteria; matrix