文章编号:1007-6492(2001)04-0038-05

基于下偏矩的资源配置优化模型求解方法研究

王明涛[1], 王秋红[2]

(1.上海财经大学证券期货学院,上海 200083;2.华北水利水电学院动力工程系,河南 郑州 450045)

摘 要:在证券投资理论中,投资风险是以收益率的方差计量的,尽管以方差计量风险计算简单,但有一些严格假设,这些假设往往与实际不符.以下偏矩作为风险计量指标,在理论上克服了方差的不足,但以下偏矩为目标函数的资源配置优化模型求解复杂,从而制约了下偏矩在实际中的应用.针对Harlow均值-下偏矩资源配置优化模型求解的困难,通过恰当变换,得到了该模型的转换形式,此转换模型不但求解容易,而且能得到相应证券组合的下偏矩统计量精确值,为下偏矩在投资分析中的应用提供了简便易行的方法.

关键词:下偏矩;资源配置优化模型;求解方法

中图分类号:F 830.91 **文献标识码**:A

0 引言

风险与收益是任何投资者在投资过程中所关心的两大主题.在风险与收益之间寻求最佳平衡是投资者追求的目标.早在1952年Markowitz[1]创立现代证券组合理论之时,就明确指出,半方差是理论上最完美的风险计量指标,但他没有使用半方差而用方差计量风险,是因为半方差统计量计算的复杂性超过了概念上的适用性[2].计算的复杂性一直是影响半方差在实际中应用的主要障碍.随着研究的深入,人们发现用方差计量风险,在理论上存在着固有缺陷,因此,对半方差方法的研究重新引起了人们的兴趣.

为了克服方差计量风险的不足,人们从更广泛意义上提出了下方风险(Downside-risk)计量方法.下方风险是指,给定一个目标收益率 h,只有小于 h 的收益率才被作为风险衡量的计算因子.半方差仅是下方风险计量方法的一种,除此之外,人们还提出了其他下方风险测度方法,这些方法都涉及到目标收益率分布左尾部分的某种"矩",被归纳为下偏矩方法.1991年,以下偏矩为风险计量指标,Harlow[2]给出了均值-下偏矩结构下的证券投资组合优化模型(资源配置优化模型).为解决下偏矩统计量的计算问题,他采取预先给定一组参数,通过构造实验分布的方法计算下偏矩.这种方法不但计算复杂,而且不易求出参数的精确值.如果能找到简化下偏矩统计量的计算方法或能将以下偏矩为目标函数的资源配置优化模型转化为容易求解的优化模型,将会极大地提高下偏矩在实际中的应用程度,有利于投资决策的科学化.

本文对Harlow均值-下偏矩资源配置优化模型进行恰当变换,得出了该模型的转换模型,此模型不但求解简便,而且有效地解决了下偏矩统计量求解困难的问题,为下偏矩的应用提供了一种简单、可行的方法.

1 Harlow均值-下偏矩资源配置优化模型

1.1 下偏矩统计量及其估计

下偏矩 LPM_q(Lower Partial Moments),是指某一概率分布左尾部分的某种"矩".以下偏矩计量证券投资风险时,是指投资收益率小于给定目标收益率左尾部分的某种"矩".

若记某一离散证券组合收益率为 R_p,投资者的目标收益率为 h,则 LPM_q 可描述为

$$LPM_q = \sum_{R_p=-\infty}^{h} P_p(h - R_p)q , \tag{1}$$

收稿日期:2001-09-05;修订日期:2001-10-10

作者简介:王明涛(1964-),男,河南省偃师市人,上海财经大学副教授,博士,主要从事投资分析方面的研究.

式中：P_p 为 R_p 发生的概率；$q=0,1,2$，q 取不同的值，反映了 LPM_q 的不同含义；LPM_0 为低于目标收益率的概率；LPM_1 为单边离差的均值，称为目标不足；LPM_2 类似于方差，是偏差平方的概率加权，因为它是关于目标计算的偏差，故 LPM_2 也称为目标半方差.

下偏矩对风险计量的假设条件非常简单，它仅要求投资者为风险厌恶型，而多数投资者都是风险厌恶型的；另外，下偏矩反映了投资者对正负偏差不一致的真实心理感受；第三，以下偏矩为目标函数的优化模型可以为投资者提供比 Markowitz 模型更多的下方损失保护. 因此，从理论上讲，下偏矩方法优于方差方法[1].

为了使用历史收益率数据估计下偏矩，Harlow 给出了如下修正公式：

$$LPM_1(h,w)=\sum_{R_p<h}^{h}\frac{1}{n-1}(h-R_p)^q, \qquad (2)$$

式中：n 为收益率观测的个数.

若设有 m 种证券，每一种证券的收益率为一随机变量，分别记为 $R_1,R_2,\cdots,R_m$，各证券收益率的加权系数分别为 $w_1,w_2,\cdots,w_m$（$\sum_{i=1}^{m}w_i=1$，$w_i\geq 0$），则证券组合投资的收益率为随机变量 R_p 与 R_i 之间存在如下关系：

$$R_p=\sum_{i=1}^{m}w_i\cdot R_i, \qquad (3)$$

当给定 w_i，n 和 h 值后，根据式(2)，(3)可以求出下偏矩 LPM_q 的数值.

1.2　Harlow 均值 – 下偏矩资源配置优化模型

Harlow[2] 以式(2)为目标函数，给出了以下偏矩为风险计量指标的均值 – 下偏矩资源配置优化模型：

$$\min LPM_q(h,w)=\sum_{R_p<h}^{h}\frac{1}{n-1}(h-R_p)^q,$$

$$(VP_1)\quad \text{s.t.}\begin{cases}\sum_i w_i\cdot E(R_i)\geq R_{p*}\;;\\ \sum_i w_i=1,w_i\geq 0\;,\end{cases}$$

式中：$q=1,2$；w_i 为分配给证券 i 的投资比重；R_i 为证券 i 的投资收益率随机变量；$E(R_i)$ 为 R_i 的数学期望；R_{p*} 为投资者的期望收益率水平（最低期望收益率）.

模型(VP_1)的求解十分复杂，因为在 w_i 确立之前，由于各证券加权系数 w_i 的位置比较分散，很难判断 R_p 是否小于目标值 h. Harlow 求解模型(VP_1)的方法是预先给定一组 w，n，通过构造实验分布的方法计算 LPM_q，进而求(VP_1)的近似最优解. 这种方法不但烦琐，而且不易求出参数的精确值. 如何求解模型(VP_1)，得出下偏矩及相关参数的精确值，是下偏矩方法在实际中应用的关键所在，也是本文研究的重点.

2　Harlow 均值 – 下偏矩资源配置优化模型求解方法研究

为了分析方便，在上述记号的基础上，进一步引入如下记号：设有 n 个观测点，第 i 种证券投资收益率在第 j 个观测点的观测值记为 R_{ij}（$i=1,2,\cdots;m$，$j=1,2,\cdots,n$），则第 i 种证券在第 j 个观测点经目标收益率 h 调整后的收益率观测值记为 $x_{ij}=R_{ij}-h$.

设证券投资组合在第 j 个观测点的观测值为 x_j，根据式(3)，有

$$x_j=w_1x_{1j}+w_2x_{2j}+\cdots+w_mx_{mj}=\sum_{i=1}^{m}w_ix_{ij}, \qquad (4)$$

记 $R_i^-=\min\{R_i,0\}$ 为 R_i 的负部[3]，则 R_i^- 在第 j 个观测点的值为

$$x_{ij}^-=-\min\{x_{ij},0\}\;, \qquad (5)$$

根据式(4)，R_p 的负部 R_p^- 在第 j 点的观测值为

$$x_j^-=-\min\{x_j,0\}=\min\{w_1x_{1j}+w_2x_{2j}+\cdots+w_mx_{mj},0\}\;. \qquad (6)$$

2.1　计算公式的转换

为了简便，这里仅分析 $q=2$ 的情况（$q=1$ 时的分析方法相同，且更为简单）.

根据上述记号，LPM_2 的计算公式可转换为

$$LPM_2=\sum_{R_p<h}^{h}\frac{1}{n-1}(h-R_p)^2=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{R_p<h}^{h}(h-R_p)^2=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{R_p<h}^{h}(R_p-h)^2=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j^-)^2, \qquad (7)$$

当 n 较大时，有

$$LPM_2=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j^-)^2\approx\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j^-)^2. \qquad (8)$$

2.2　Harlow 均值 – 下偏矩资源配置优化模型的转换模型

Harlow 均值 – 下偏矩资源配置优化模型有两部分，一部分为目标函数，一部分为约束条件. 通过引入随机变量负部的方法，可以将目标函数转化为式(8)的形式；对于约束条件，(VP_1)中有两个，一个为加权系数自身的约束（第二个约束），没有发生变化；另一个为证券组合的期望收益约束，

即证券组合的期望收益不小于最低的期望收益水平.

若记第 i 个证券的期望收益率为$\overline{R_i}$,证券组合的期望收益率为$\overline{R_p}$,则有

$$\overline{R_i} = E(R_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} R_{ij}, \tag{9}$$

$$\overline{R_p} = E(R_p) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} R_{pj} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}(w_i R_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} w_i\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} R_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m} w_i E(R_i) = \sum_{i=1}^{m} w_i \overline{R_i},$$

若采用经目标收益率 h 调整后的收益率序列数据 $x_{ij}, x_j (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n)$,则式(9),(10)变换为

$$\overline{R_i} = E(R_i)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + h ; \tag{11}$$

$$\overline{R_p} = E(R_p) = \sum_{i=1}^{m} w_i \overline{R_i} = \sum_{i=1}^{m} w_i\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right] + h , \tag{12}$$

假设投资者的期望收益水平为 R_{p*},则证券组合的期望收益约束为

$$\overline{R_p} \geq P_{p*} \tag{13}$$

将式(12)代入式(13),则有

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right] \cdot w_i + h \geq R_{p*}. \tag{14}$$

令 $M_p^* = R_{p*} - h$,则

$$\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{xj}\right] \cdot w_i \geq M_p^*. \tag{15}$$

若记 $\boldsymbol{W} = [w_1, w_2, \cdots, w_m]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{I} = [1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix},$$

则式(15)的矩阵形式为

$$\frac{1}{n}\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{W} \geq M_p^*, \tag{16}$$

这样,在 $q=2$ 时,(VP_1)可转化为二次规划问题:

$$\min Z = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j^-)^2,$$

$$(\mathrm{VP}_2) \quad \text{s.t.}\begin{cases} \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right] \cdot w_i \geq M_p^* ; \\ w_1 + w_2 + \cdots + w_m = 1 ; \\ w_i \geq 0, i = 1,2,\cdots,m . \end{cases}$$

在(VP_2)中,目标函数与约束条件中具有不同的变量(x_{ij}, x_j),事实上,它们之间存在式(6)所示的关系.将式(6)代入(VP_2)得:

$$\min Z = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j^-)^2,$$

$$(\mathrm{VP}_3) \quad \text{s.t.}\begin{cases} x_j^- = -\min\{w_1, x_{1j} + w_2 x_{2j} + \cdots + w_m x_{mj}, 0\}, (j = 1,2,\cdots,n) ; \\ \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right] \cdot w_i \geq M_p^* ; \\ w_1 + w_2 + \cdots + w_m = 1 ; \\ w_i \geq 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m). \end{cases}$$

(VP_3)的求解比较困难,为此,作如下变换:由约束条件(1)知,

$$-x_j^- = \min\{w_1 x_{1j} + w_2 x_{2j} + \cdots + w_m x_{mj}, 0\},$$

则

$$w_1 x_{1j} + w_2 x_{2j} + \cdots + w_m x_{mj} \geq -x_j^-, (0 \geq -x_j^-).$$

令 $Y_j = x_j^-$,将其代入(VP_3),则有

$$\min Z = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j^2,$$

$$(\mathrm{VP}_4) \quad \text{s.t.}\begin{cases} w_1 x_{1j} + w_2 x_{2j} + \cdots + w_m x_{mj} + y_j \geq 0 ; \\ w_1 + w_2 + \cdots, w_m = 1 ; \\ \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot \left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right] \geq M_p^* ; \\ y_j \geq 0, w_i \geq 0 \ (i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n), \end{cases}$$

记 $\boldsymbol{Y} = [y_1, y_2, \cdots, y_n]^{\mathrm{T}}$,

因 $\sum_{j=1}^{n} y_j^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 = \boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{Y}$,

故(VP_4)的矩阵形式为

$$\min \mathrm{LPM}_2 = \frac{1}{n}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{Y},$$

$$(\mathrm{VP}_5) \quad \text{s.t.}\begin{cases} \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W} + \boldsymbol{Y} \geq 0 ; \\ \boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{W} = 1 ; \\ \frac{1}{n}\boldsymbol{I}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{W} \geq M_p^* ; \\ \boldsymbol{Y} \geq 0, \boldsymbol{W} \geq 0 . \end{cases}$$

(VP_5)是一个简单的二次规划问题,而且目标函数正定,因此求解简单(具有通用的计算程序)[4],同时它不存在类似于 Markowitz 模型中的协方差阵,所以应用此模型可以较方便地求出 $q=2$ 时,Harlow 下偏矩证券组合优化模型的最优解($\boldsymbol{W}$)及相应的下偏矩风险值(LPM_2).

3 应用实例

3.1 样本股票的选择及数据说明

为说明上述模型的有效性,本文随机选择了上海证券交易市场的 11 只股票,其代码和名称分

别为:600104(上海汽车),600605(轻工机械),600615(丰华园珠),600625(ST 水仙),600629(棱光实业),600642(申能股份),600649(原水股份),600635(大众科创),600661(交大南洋),600806(昆明机床),600807(济南百货).采用数据的时限区间为 1998 年 1 月 9 日~1999 年 9 月 30 日,共 20 个月收益率数据.月收益率按式(17),(18)计算,结果如表 1 所示.

表 1　11 只股票的月收益率数据

Table 1　Month return data of 11 stocks　　%

编号	1月	2月	3月	月4	5月	6月	7月	8月	9月	10月	11月
1	-3.90	-0.71	-3.75	11.79	9.60	-4.95	-0.42	-2.21	3.23	21.95	10.02
2	6.13	16.93	4.11	8.17	15.23	0.47	29.92	3.63	50.60	-7.00	0.58
3	2.17	1.10	11.22	-3.43	61.08	-3.68	3.14	4.09	32.40	49.68	47.41
4	0.07	57.52	69.09	25.18	21.55	-2.94	-7.65	5.30	-1.21	13.94	21.44
5	-2.19	-18.6	1.02	3.41	-21.1	-7.60	-5.11	-6.06	-15.6	-27.0	-27.7
6	8.88	0.96	-8.52	-7.58	0.85	-0.89	-0.61	-5.36	15.07	4.49	14.21
7	-10.6	-13.0	-4.60	-2.50	-21.0	-10.3	-12.3	-11.4	-21.2	13.55	-18.4
8	5.31	34.78	3.66	24.63	32.82	3.00	3.89	-2.84	11.42	5.82	32.62
9	0.10	-0.81	0.47	-11.8	-8.89	0	-2.54	-5.97	-3.44	-11.3	-12.0
10	11.03	-2.03	-11.5	-6.99	-3.61	-3.76	-2.74	0.13	0.37	-8.06	-8.67
11	-12.7	-18.7	-10.6	-15.9	-9.62	0	-4.94	-5.05	-11.2	-13.5	-9.50
12	4.67	6.12	2.59	-4.26	-4.82	0.76	-2.67	7.63	8.33	-1.36	9.26
13	-3.98	-8.65	-3.68	-6.67	-2.82	-10.1	-6.25	-6.08	-2.54	15.02	-4.07
14	1.82	21.47	0.45	29.21	19.13	1.67	4.23	.47	8.45	42.78	16.14
15	-2.18	1.30	-9.17	-17.9	-15.4	16.16	1.25	2.41	-10.5	-1.56	-6.69
16	8.12	4.50	4.35	-1.50	8.52	42.10	10.48	2.35	31.46	1.22	2.17
17	31.27	59.14	10.15	31.91	21.13	-2.07	11.58	51.21	90.48	50.36	71.57
18	-3.36	-5.68	0	5.99	-18.3	12.71	4.50	-9.35	-11.3	-27.2	-23.4
19	1.04	-1.90	-11.1	6.52	5.03	-6.28	5.08	8.90	8.45	15.44	0.68
20	-6.59	-2.60	-3.61	-11.6	-6.17	-7.64	-2.08	-7.61	-2.49	-10.8	-1.64

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}}, \tag{17}$$

式中:R_t 为某证券在时期 t 的收益率;P_t,P_{t-1} 分别为证券在 t,$t-1$ 时期的收盘价;D_t 为证券在 t 时期每单位所获得红利、股息等收入.D_t 的计算公式为

$$D_t = \text{每股现金红利} + P_t \times (\text{送股比例} + \text{配股比例}) - \text{每股配股价} \times \text{配股比例}. \tag{18}$$

3.2　计算结果及分析

将表 1 的数据代入(VP_5),本文应用 Matlab 语言,可求出 $q=2$ 时均值-下偏矩结构下的资源配置优化模型的最优解为

$\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}=$ [0.0504,0.0000,0.3127,0.0000,0.0000,0.2631,0.0000,0.0000,0.2551,0.1188,0.0000];

$\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}=$ [0,0,0,0,0.0897,0,0.0847,0,0.0207,0.0490,0.0842,0,0.0288,0,0.0159,0,0,0.0292,0.0107,0.0539].

最优解处的收益值 $E_p=0.0400$,二阶下偏矩 $\mathrm{LPM}_2(Z_{\min})=0.0015$.

要说明的是,最优解是 h 和 R_{p*} 的函数,h,R_{p*} 不同,最优解也不同.为了简单,这里取 $h=0$,$R_{p*}=0.04$(因为 11 只股票中,最大的期望收益率为 0.0904,故取 $R_{p*}=0.04$ 可以说明问题;h 取其它数值时,其计算过程与 $h=0$ 相同).

另外,应用模型(VP_5),计算速度很快,每计算上述 11 只股票的一个最优解,时间不超过 3 秒钟,这充分说明了上述模型的实用性.

参考文献:

[1]　Harlow W V. Asset allocation in a downside risk framework [J]. Financial Analysts Journal, 1991(5): 28-40.

[2]　MARKOWITZ H M. Portfolio selection [J]. Journal of Finance, 1952(7): 77-91.

[3]　周概容. 概率论与数理统计[M]. 北:高等教育出版社, 1984.

[4]　《运筹学》教材编写组. 运筹学[M]. 北京:清华大学出版社, 1994.

Study on the Solving Method of Optimal Model of Asset Allocation in a Mean – LPMs Framework

WANG Ming – tao[1], WANG Qiu – hong[2]

(1. School of Securities & Futures, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200083, China; 2. College of Power Engineering, North China Institute of Water Conservanly & Hydroelectric Power, Zhengzhou 450045, China)

Abstract: In the theory of stock investment, the investment risk is measured by variance of investment return. Although the variance is simply calculated, it needs some strict hypotheses that are not constant with practice in stock market. Using LPMs as the measure of investment risk can overcome the flaws of variance in theory, but the solution the optimal model of asset allocation whose object function is LPMs is much more complicated, so that it confines the use of LPMs in practice. This paper, in view of the difficulty of solving Harlow's Optimal Portfolio Model, obtains the transformation form of the Harlow's Optimal Portfolio Model by appropriate alternation. The transforming model is not only solved easily, but through it, the accurate value of LPM statistic corresponding to a certain portfolio can also be obtained. It provides a simple and useful method of using LPM in investment analysis.

Key words: LPMs; optimal model of asset allocation; method of solving the model

(上接12页)

Stress Analysis of Laminated Composite Plates with P – version Finite Element Method

ZHU Hai – tang[1], ZHANG Xian – rui[2], CHEN Xu – guo[3]

(1. College of Environmental & Hydraulic, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China; 2. The Fifth Building Company of Henan Province, Zhengzhou 450007, China; 3. The Constructure Committee of Xinyang City, Xinyang 464000, China)

Abstract: The analysis results of stress on laminated composite thick plates based on higher order theory can usually satisfy to engineering demand. In this paper, stress analysis of laminated composite plates is presented based on the P – version finite element method. The displacement fields are based on integrals of Legendre's polynominals. Numerical computations are made efficient through dimensional reduction and internal condensation. Results show that the calculating method of laminated composite plates based on the P – version finite element is reliable.

Key words: higher order theory; P – version FEM; laminated composite plate; dimensional reduction method