2001年 12月 郑州工业大学学报 Dec. 2001
第22卷 第4期 Journal of Zhengzhou University of Technology Vol.22 No.4

文章编号:1007-6492(2001)04-0010-03

用P型有限元分析层合板的应力

朱海堂[1],张献瑞[2],谌续国[3]

(1.郑州大学环境与水利学院,河南 郑州 450002;2.河南省第五建筑工程公司,河南 郑州 450007;3.信阳市建设委员会,河南 信阳 464000)

摘 要:对于较厚的层合板,基于一般高阶理论的应力计算结果往往不能满足工程要求.用基于高阶理论的P型有限元法分析层合板的应力分布规律.位移场用Legendre多项式的积分进行插值,用维数缩减法把三维的层合板问题化成二维问题,用静力凝聚把单元内部自由度凝聚掉,这样可有效地计算各向异性材料层合板的应力分布.结果表明,采用P型有限元求解任意厚度、任意方向铺设的四边形复合材料层合板问题是可靠的.

关键词:高阶理论;P型有限元;层合板;维数缩减法

中图分类号:TU 313.1 文献标识码:A

0 引言

自50年代开始,纤维增强复合材料因具有优越的材料物理性能而被广泛应用.目前,由各向异性层组成的层合厚板的用途也越来越广泛.在层合厚板中,由于横向剪切应力对层合板的性能影响很大,因此在工程设计中就很有必要了解其横向剪切应力和层间应力的分布规律.但是,将层合板看作是层与层之间完全结合的,认为每一层均为平面应力状态,且不计横向剪切应力和层与层之间的挤压应力的古典板理论并不能适用于层合厚板.Reissner和Mindlin改进了古典板理论,引进了横向剪切应力.Yang P. C.,Norris C. H.和Stavsky Y.[1]进一步把Reissner-Mindlin的一阶剪切理论推广到层合板.一般来讲,对于较薄的层合板,这一理论的计算结果具有足够的精度,能够满足工程要求.但对于较厚的层合板,由于层间应力不能被忽略,层合板的问题已属三维问题,各种更加精确的高阶理论相继出现[2],大多数高阶理论都是从假设位移场入手,把位移展开成横坐标Z的幂级数.但当用于较厚的层合板时,会出现应力不精确,特别是靠近层与层之间的位置.

有限元法是求解数值问题的强有力的手段.Isakson.G[3]用传统的有限元法(b型:靠加密网格,增加单元数来提高计算精度)研究了层合板的层间应力,但由于层合板在层与层之间的材料特性不连续,甚至对只有两层或三层的简单层合板问题都需要划分大量的单元(特别是在厚度方向上).近年来,P型有限元法[4](靠提高插值多项式的阶数而保持单元数和形函数不变来提高计算精度)受到广泛重视.实践证明,P型有限元法对奇异问题和边界层问题比传统的b型有限元法更可靠、有效[4,5].

本文把P型有限元法与高阶理论结合起来,位移场用Legendre多项式的积分表示,采用维数缩减法[6]把三维问题的层合板问题化为二维问题,并用静力凝聚把单元内部自由度凝聚掉,可减少总自由度数,以节省计算时间和内存,从而准确地计算各向异性的层合板应力分析问题.

1 层合板的P型有限元列式

一个四边形层合板单元中,每一层的刚度矩阵和荷载向量由直角坐标系中的相应位移u_1,u_2,u_3来导出,单元的刚度矩阵和荷载向量则由单元中各层刚度矩阵和荷载向量叠加而成.用维数缩减法把一个单元的第j层(见图1)的位移场表示为[6]

$$u_i^j = \xi_i(\bar{x},\bar{y}) \cdot \eta_i^j(\bar{z}) =$$

收稿日期:2001-06-10;修订日期:2001-08-29
基金项目:河南省科技攻关项目(971130415)

作者简介:朱海堂(1964-),男,河南省虞城县人,郑州大学副教授,博士研究生,主要从事新型复合建筑材料方面的研究.

$$\sum_{l=1}^{p_{zi}+1}\sum_{k=1}^{n_i} u_{kli}N_k(\bar{x},\bar{y})M_l(\bar{z}) \ , \qquad (1)$$

式中：$M_l(\bar{z})$是一维形函数，由 Legendre 多项式表示；$N_k(\bar{x},\bar{y})$是二维形函数，由 $M_l(\bar{z})$乘以特定的函数表示；p_{zi}是第 i 个位移沿板厚方向上的多项式阶数；n_i 是每层第 i 个位移面内的变量数，当面内多项式阶数 $p=1$ 时，$n_i=4$；当 $p\geqslant 2$ 时，$n_i=(p+1)(p+2)/2+2$；u_{kli}是待定系数.

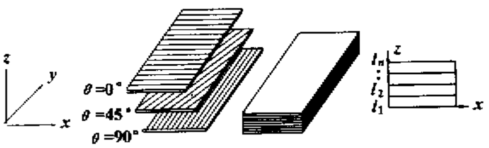

图 1　层合板的坐标系统

Fig.1　Coordinate system of laminated composite plates

对于一维形函数，根据多项式的阶数不同，在标准区域$(-1\leqslant\bar{z}\leqslant 1)$上为

$$M_1(\bar{z}) = \frac{1}{2}(1-\bar{z}) \ ;$$

$$M_2(\bar{z}) = \frac{1}{2}(1+\bar{z}) \ ;$$

$$M_3(\bar{z}) = \frac{3}{2\sqrt{6}}(\bar{z}^2-1) \ ;$$

$$M_4(\bar{z}) = \frac{5}{2\sqrt{10}}(\bar{z}^3-\bar{z}) \ ;$$

对于 $l\geqslant 1$，其通式为

$$M_{l+1}(\bar{z}) = \sqrt{\frac{2l-1}{2}}\int_{-1}^{\bar{z}} P_l(t)\,\mathrm{d}t \ ,$$

式中：$P_l(t)=\frac{1}{2^i i!}\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}(t^2-1)^i$ 是 Legendre 多项式.

对于二维形函数，在标准四边形区域$(-1\leqslant\bar{x}\leqslant 1, -1\leqslant\bar{y}\leqslant 1)$上，可由一维形函数来形成，即

(1) 在四个角点，

$$M_k(\bar{x})\cdot M_l(\bar{y}) \ (k,l=1,2) \ ;$$

(2) 在边界点，

$$M_k(\bar{x})\cdot(\bar{y}+1) \ (\bar{y}=1) \ ;$$

$$M_k(\bar{x})\cdot(\bar{y}-1) \ (\bar{y}=-1) \ ;$$

$$M_k(\bar{y})\cdot(\bar{x}+1) \ (\bar{x}=1) \ ;$$

$$M_k(\bar{y})\cdot(\bar{x}-1) \ (\bar{x}=-1) .$$

(3) 当 $p\geqslant 4$ 时，会出现内部节点，形函数由 $M_k(\bar{x})\cdot M_l(\bar{y})$形成，只要保证 $k+l\geqslant p$，且 $k,l\geqslant 2$.

由 nl 层组成一个层合板单元的应变能为

$$U_E = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{nl}\int_{vj}\{\varepsilon^j\}^{\mathrm{T}}[c^j]\{\varepsilon^j\}\,\mathrm{d}v \ , \qquad (2)$$

式中：$\{\varepsilon^j\}=[B]\{u^j\}$是三维应变向量；$[c^j]$是第 j 层的弹性矩阵.

根据最小势能原理，可得第 j 层的刚度矩阵为

$$[k^j] = \int_v [B]^{\mathrm{T}}[c^j][B]\,\mathrm{d}v \ .$$

然后，根据内部自由度静力凝聚和层间位移相容原则，把每层刚度矩阵组装，形成总体刚度矩阵.

每层载荷向量由下列公式形成：

(1) 由横向分布载荷形成的载荷向量为

$$\{F_q\} = \iint_A q(\bar{x},\bar{y})[N(\bar{x},\bar{y})]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}A \ ;$$

(2) 由横向线分布载荷形成的载荷分量为

$$\{F_l\} = \int f_n[N(\bar{x},\bar{y})]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s \ ;$$

(3) 由横向正弦分布载荷形成的载荷向量为

$$\{F_s\} = \iint_A q_0\sin\frac{\pi x}{l}[N(\bar{x},\bar{y})]^{\mathrm{T}}\mathrm{d}A \ .$$

求解有限元刚度平衡方程，求得系数 u_{kli}后，便可求得位移场 $\{u^j\}$，再用下式求层合板任一点的应力

$$\{\sigma^j\} = [c^j]\cdot[B]\cdot\{u^j\} \ .$$

2　算例

为了验证 P 型有限元求解层合板问题的有效性，本文计算了两个层合板的例子，并将计算结果与解析解及 b 型有限元计算结果进行了比较.

例 1　正方形层合板，由三层等厚宏观各向同性材料正交铺设而成(0°/90°/0°)，每层材料常数为：$E_l=1.724\times10^5$ N/mm^2，$E_T=6.896\times10^3$ N/mm^2，$G_{lT}=3.448\times10^3$ N/mm^2，$G_{Tl}=1.379\times10^3$ N/mm^2，$V_{lT}=vTl=1.724\times10^{-3}$ N/mm^2. 式中，l 表示平行于纤维方向，T 表示垂直于纤维方向. 板长 a 与板厚 t 之比为 4，四边简支，承受横向正弦分布载荷 $q_0\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)$.

由于对称性，取 1/4 板，划分为一个 P 型单元，在厚度方向上取三阶多项式，在 $\bar{x}-\bar{y}$ 平面取五阶多项式，计算结果如图 2 和图 3 所示，并与 Engblom J.J.[7]用 20 个 8 节点且每个节点有 7 个自由度的四边形(b 型)单元的结果及 Pagano N.J.[8]三维弹性解析解作了比较. 由图 2 和图 3 可见，与 Pagano N.J.的解析解结果很符合.

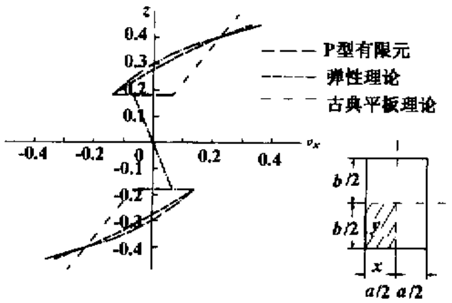

图 2 板中点沿厚度方向上的正应力分布规律

Fig.2 Distribution of bending stress along thickness at mid – plate

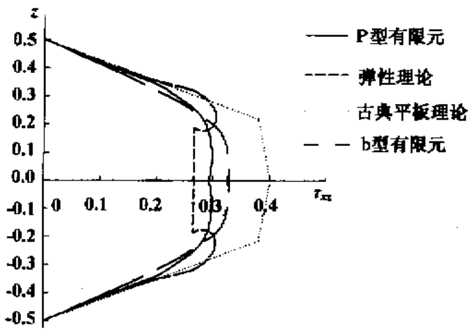

图 3 在 $x=0, y=a/2$ 处沿厚度方向剪应力 τ_{xz} 分布规律

Fig.3 Distribution of shear stress along thickness at $x=0, y=a/2$

例 2 长方形层合板,板长 b 与板宽 a 之比为 3,板宽 a 与板厚 t 之比为 4,承受横向分布载荷 $q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)$,其他条件与上例相同.计算结果与 Pagano N.J.[8] 的三维弹性解进行比较,如图 4 所示,符合很好.

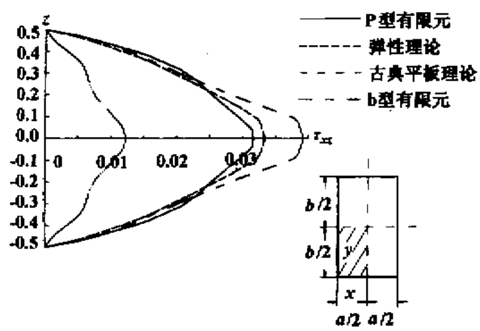

图 4 在 $x=a/2, y=0$ 处沿厚度方向剪应力 τ_{yz} 分布规律

Fig.4 Distribution of shear stress along thickness at $x=a/2, y=0$

3 结论

(1) 位移场用 Legendre 多项式插值的 P 型有限元求解任意厚度、任意方向铺设的四边形复合材料层合板问题是可靠、有效的.

(2) 通过维数缩减法,可把三维层合板问题化为二维问题,并不影响 P 型有限元的收敛性,节点位移和能量都单调收敛.

(3) 用静力凝聚把单元内部自由度进行凝聚后组装总体刚度矩阵,可有效节省内存和计算时间.

(4) 层间应力可被精确到相当高的精度.只要多项式的阶数不断增加,就可以处理任意受力和边界条件的多层层合板的应力分析问题,且能够保证有足够的精确度.

参考文献:

[1] YANG P C, NORRIS C H, STAVSKY Y. Plastic wave propagation in heterogeneous plates[J]. Int J Solids and Structures, 1966(2): 665 – 678.

[2] 曾加雄,范业立.一种新的叠层板壳高阶理论[J].应用数学及力学,1990,11(1): 23 – 34.

[3] ISAKSON G, LEVY A. Finite element analysis of interlaminar shear in fibrous composite[J]. J of Composite Materials, 1971(5): 273 – 276.

[4] ZIEKIEWICZ O C, GAGO S R, KELLY D W. The hierachical concept in finite element analysis[J]. Computer & Structures, 1983, 16(4): 53 – 65.

[5] BASU P K, PEANO A. Adaptivity in P – version of finite element method approximation[J]. ASCE, 1981, 12: 105 – 107.

[6] BASU P K. Dimensional reduction of structural plates and shells[R]. Tennessee: Vanderbilt University, 1986.

[7] ENGBLOM J J, OCHOA O O. Through the thickness stress prediction for laminated plates of advanced composite materials[J]. Int J for Numerical Method in Engineering, 1985(21): 1750 – 1776.

[8] PAGANO N J. Exact solution for rectangular bidirectional composites and sandwich plates[J]. J of Composite Materials, 1970(4): 38 – 41.

(下转 42 页)

Study on the Solving Method of Optimal Model of Asset Allocation in a Mean - LPMs Framework

WANG Ming - tao[1], WANG Qiu - hong[2]

(1. School of Securities & Futures, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200083, China; 2. College of Power Engineering, North China Institute of Water Conservanly & Hydroelectric Power, Zhengzhou 450045, China)

Abstract: In the theory of stock investment, the investment risk is measured by variance of investment return. Although the variance is simply calculated, it needs some strict hypotheses that are not constant with practice in stock market. Using LPMs as the measure of investment risk can overcome the flaws of variance in theory, but the solution the optimal model of asset allocation whose object function is LPMs is much more complicated, so that it confines the use of LPMs in practice. This paper, in view of the difficulty of solving Harlow's Optimal Portfolio Model, obtains the transformation form of the Harlow's Optimal Portfolio Model by appropriate alternation. The transforming model is not only solved easily, but through it, the accurate value of LPM statistic corresponding to a certain portfolio can also be obtained. It provides a simple and useful method of using LPM in investment analysis.

Key words: LPMs; optimal model of asset allocation; method of solving the model

(上接12页)

Stress Analysis of Laminated Composite Plates with P - version Finite Element Method

ZHU Hai - tang[1], ZHANG Xian - rui[2], CHEN Xu - guo[3]

(1. College of Environmental & Hydraulic, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China; 2. The Fifth Building Company of Henan Province, Zhengzhou 450007, China; 3. The Constructure Committee of Xinyang City, Xinyang 464000, China)

Abstract: The analysis results of stress on laminated composite thick plates based on higher order theory can usually satisfy to engineering demand. In this paper, stress analysis of laminated composite plates is presented based on the P - version finite element method. The displacement fields are based on integrals of Legendre's polynominals. Numerical computations are made efficient through dimensional reduction and internal condensation. Results show that the calculating method of laminated composite plates based on the P - version finite element is reliable.

Key words: higher order theory; P - version FEM; laminated composite plate; dimensional reduction method