2001年 9月 郑州工业大学学报 Sep. 2001
第22卷 第3期 Journal of Zhengzhou University of Technology Vol.22 No.3

文章编号:1007-6492(2001)03-0075-03

多仪器同测试验数据不确定度的一种评估方法

张新育[1], 孙甫照[2], 王树生[1]

(1.郑州大学工程力学系, 河南 郑州 450002; 2.驻马店师范专科学校物理系, 河南 驻马店 463000)

摘 要: 对于多个测量仪器同时对同一试验进行测量取得同时刻的试验数据,建立了单项分类随机效应模型 $y_{ij}=\mu+\mu_i+\varepsilon_{ij}(i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,\ m)$, ε_{ij}, $iid. \sim N(0,\sigma_j^2)$; μ_i, $iid. \sim N(0,\sigma_0^2)$, 且 ε_{ij} 与 μ_i 独立, $i=1,\cdots,n,j=1,\cdots,m$. 利用多元统计分析方法给出了各仪器在随机试验中的A类不确定度的相等性检验 $H_0:\sigma_1^2=\cdots=\sigma_m^2$. 对模型 $y_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\varepsilon_{ij}$; μ,α_i,β_j 为固定效应, ε_{ij}, $iid. \sim N(0,\sigma^2)$ 对仪器系统误差做了一致性检验,即 $H_0':\beta_1=\cdots=\beta_m$,从而给出了对不确定度的评估方法.

关键词: 随机试验; 相等性检验; A类不确定度

中图分类号: O 212 **文献标识码**: A

0 引言

按照文献[1]中对不确定度的描述,不可重复性试验即待测物理量随时间作随机变化的试验的不确定度尚无直接评估的方法.而这类随机试验又广泛地存在着,如测量火箭燃烧室某时刻的压力,测量某导线上某时刻的电流强度,测量某根钢筋的抗拉强度等,这类试验的一个可行测量方法是多个仪器同时独立测量.设用 m 台仪器同时测量第 i 时刻的物理量 $(i=1,2,\cdots,n)$,模型为

$$y_{ij}=\mu+\mu_i+\varepsilon_{ij}$$

$$(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m),$$

式中: y_{ij}, ε_{ij} 依次是第 j 台仪器第 i 个时刻测量的观测值和仪器误差; μ 为待测量的真实均值; μ_i 是第 i 个时刻待测量真值与 μ 的差.在一定条件下可对第 i 时刻的真值 $\mu+\mu_i$ 进行估计并给出不确定度.

若 $y_{i1},y_{i2},\cdots,y_{im}$, $iid. \sim N(\mu+\mu_i,\sigma^2)$,则相当于对 $\mu+\mu_i$ 作 m 次重复测量, $\mu+\mu_i$ 的估计量为 $\bar{y}_{i\cdot}=\sum_{j=1}^{m}y_{ij}/m$,对应的测量不确定度为[1]

$$S(\bar{y}_{i\cdot})=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})^2/[m(m-1)]}\ .$$

特别 $m=2$ 时,即两个仪器同测时, $\mu+\mu_i$ 的估计量为 $\bar{y}_{i\cdot}=(y_{i1}+y_{i2})/2$,不确定度为 $S(\bar{y}_{i\cdot})=|y_{i2}-y_{i1}|/2$.

使用上述方法的前提是检验 $y_{i1},y_{i2},\cdots,y_{im}$ 的方差一致性和期望值的一致性.下面我们给出检验的方法.

1 方差的一致性检验

对多仪器同时独立测 n 个时刻,有 $y_{ij}=\mu+\mu_i+\varepsilon_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$,作随机化处理.设 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$, $iid. \sim N(0,\sigma_0{}^2)$; $\varepsilon_{1j},\varepsilon_{2j},\cdots,\varepsilon_{nj}$, $iid. \sim N(0,\sigma_j{}^2)$, $j=1,\ 2,\cdots,m$.上述不同的 μ_i,ε_{ij} 相互独立.因此有

$$\vec{Y}_i=(y_{i1},\ y_{i2},\ \cdots,\ y_{im})'$$

$$(i=1,2,\cdots,\ n,\ iid. \sim N(U,\textstyle\sum_0)),$$

其中, $U=\mu \boldsymbol{I}_m$,这里 $\boldsymbol{I}_m'=(1,1,\cdots,1)$,下同.

$$\textstyle\sum_0=\sigma^2\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{I}_m'+\Lambda\ ,$$

$$\Lambda=\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_m^2)\ .$$

我们需要检验 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2=\cdots=\sigma_m^2$.

引理1 方阵 $\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{I}_m'$ 的特征值为 $\lambda_1=m$、$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_m=0$.

引理2 设 $\vec{P}_1$ 为 $\lambda_1=m$ 的标准特征向量, $\vec{P}_2,\vec{P}_3,\cdots,\vec{P}_m$ 为 $\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_m=0$ 的标准正交特征向量,则

(1) $\vec{P}_1=\boldsymbol{I}_m/\frac{1}{\sqrt{m}}$;

(2) $\boldsymbol{P}=[\vec{P}_1|\vec{P}_2|\cdots|\vec{P}_m]$ 为正交方阵;

收稿日期:2001-04-07; **修订日期**:2001-06-09

基金项目:河南省自然科学基金资助项目(994053200)

作者简介:张新育(1963-),男,河南省西平县人,郑州大学副教授,主要从事数理统计方面的研究.

(3) 取 $\boldsymbol{P}_* = (\vec{P}_2 | \vec{P}_3 | \cdots | \vec{P}_m)$，则线性方程组 $\boldsymbol{P}_*'\vec{X} = \vec{O}$ 的通解为 $\vec{X} = k\boldsymbol{I}_m (k \in \boldsymbol{R})$[2].

证明：(1)，(2)显然成立，现证(3). 因为 $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \cdots, \vec{P}_m$ 是 R^m 的一个标准正交基，故 $\boldsymbol{P}_*'\vec{X} = \vec{O}$ 的解空间为 $L^{\perp}(\vec{P}_2, \cdots, \vec{P}_m)$，即 $L(\vec{P}_1)$，故通解为 $\vec{X} = k\boldsymbol{I}_m$，$k \in \boldsymbol{R}$.

定理 设 $\Sigma_0 = \sigma_0^2 \boldsymbol{I}_m \boldsymbol{I}_m' + \Lambda$，$\Sigma = \boldsymbol{P}' \Sigma_0 \boldsymbol{P}$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ m \end{array} \\ \begin{array}{cc} 1 & m \end{array} \end{array}$$

，$\Lambda, \boldsymbol{I}_m, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{P}_*$ 含义同上，则 $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_m^2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{R}^2 = 0$，其中 $\boldsymbol{R}^2 = \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} / \Sigma_{11}$.

证明：设 $\boldsymbol{P} = (\vec{P}_1 | \boldsymbol{P}_*)$，则

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{I}_m'\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} m & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} (\text{引理}),$$

$$\Sigma = \boldsymbol{P}' \Sigma_0 \boldsymbol{P} = \sigma_0^2 \boldsymbol{P}' \boldsymbol{I}_m \boldsymbol{I}_m' \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}' \Lambda \boldsymbol{P}$$

$$= \begin{bmatrix} \vec{P}_1' \Lambda \vec{P}_1 + m\sigma_0^2 & \vec{P}_1' \Lambda \boldsymbol{P}_* \\ \boldsymbol{P}_*' \Lambda P_1 & \boldsymbol{P}_*' \Lambda \boldsymbol{P}_* \end{bmatrix}.$$

因 $\sigma_j^2 > 0$，$j = 1, 2, \cdots, m$，故 $\Sigma_{11} = \vec{P}_1' \Lambda \vec{P}_1 + m\sigma_0^2 > 0$，$\Sigma_{22} = \boldsymbol{P}_*' \Lambda \boldsymbol{P}_*$ 正定，故 Σ_{22}^{-1} 也正定，由引理 2 知，$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \cdots = \sigma_m^2 \Longleftrightarrow \boldsymbol{P}_*' \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \\ \vdots \\ \sigma_m^2 \end{pmatrix} = \vec{O}_{m-1} \Longleftrightarrow \boldsymbol{P}_*' \Lambda \vec{P}_1 = \vec{O}_{m-1} \Longleftrightarrow \Sigma_{12} = 0$，$(\Sigma_{21} = \Sigma_{12}') \Longleftrightarrow \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{R}^2 = \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} / \Sigma_{11} = 0$.

H_0 的检验方法：由定理知 $\vec{Z}_i = \boldsymbol{P}\vec{Y}_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$，$iid. \sim N(\mu \boldsymbol{P}\boldsymbol{I}_m, \Sigma)$，$\boldsymbol{S}_Z = \boldsymbol{P}' \boldsymbol{S}_Y \boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{S}_Y = \sum_{i=1}^{n} (\vec{Y}_i - \bar{Y})(\vec{Y}_i - \bar{Y})'$，分块 $\boldsymbol{S}_Z = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{array}{l} 1 \\ m-1 \end{array}$，取 $\hat{R}^2 = S_{12} S_{22}^{-1} S_{21} / S_{11}$，在 H_0 成立时，即 $\boldsymbol{R}^2 = 0$ 时，$F = \frac{\hat{R}^2}{1 - \hat{R}^2} \cdot \frac{n - m}{m - 1} \sim F(m - 1, n - m)$[3].

故 H_0 的 $1 - \alpha$ 拒绝域为：$F > F_\alpha(m - 1, n - m)$（上侧分位数）.

应该提出的是上述检验方法在各仪器存在不同的系统误差时仍适用，即 $y_{ij} \sim N(\mu + \beta_j, \sigma_0^2 + \sigma_j^2)$ 时方法仍适用.

2 仪器系统误差的一致性检验

分解 m 台仪器 n 次测量的样本为两项分类无交互效应方差分析模型，$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$，$(i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m)$，这里，$\mu$ 表示总平均；α_i, β_j 表示水平 A_i（第 i 个试样）β_j（第 j 台仪器）的固定效应，ε_{ij}，$iid. \sim N(0, \sigma^2)$，则检验仪器系统误差即 $H_0': \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m$ 的统计量为

$$F = \frac{SS_B / (m - 1)}{SS_e / [(n - 1)(m - 1)]},$$

其中，
$$SS_B = n \sum_{j=1}^{m} (\bar{y}_{\cdot j} - \bar{y}_{\cdot\cdot})^2,$$

$$SS_e = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot j} + \bar{y}_{\cdot\cdot})^2.$$

当 H_0 成立时，$F \sim F(m - 1, (m - 1)(n - 1))$. 故 H_0 的 $1 - \alpha$ 拒绝域为：$F > F_\alpha(m - 1, (m - 1)(n - 1))$（上侧分位数）[4]. 系统误差要靠仪器的调整来消除.

3 应用实例

为了便于使用上述方法，我们给出部分 $\boldsymbol{P}$ 阵. $m = 2$ 时，$\boldsymbol{P} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$；$m = 3$ 时，

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

例 在火箭发动机试验中，采用两台仪器同时测量燃烧室压力，获得两组对应数据如表 1 所示，试检验两仪器误差方差的一致性和系统误差的一致性，并估计各时刻的压力和测量不确定度.

3.1 仪器误差方差的一致性检验($H_1: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$)

$$\boldsymbol{S}_Y = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} (y_{i1} - \bar{y}_{\cdot 1})^2 & \sum_{i=1}^{n} (y_{i1} - \bar{y}_{\cdot 1})(y_{i2} - \bar{y}_{\cdot 2}) \\ \sum_{i=1}^{n} (y_{i1} - \bar{y}_{\cdot 1})(y_{i2} - \bar{y}_{\cdot 2}) & \sum_{i=1}^{n} (y_{i2} - \bar{y}_{\cdot 2})^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5952.9375 & 5863.6876 \\ 5863.6876 & 5817.4375 \end{bmatrix}.$$

取
$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_Z = \boldsymbol{P}' \boldsymbol{S}_Y \boldsymbol{P} \doteq$$

$$\begin{bmatrix} 23497.7500 & 135.5000 \\ 135.5000 & 42.9998 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix},$$

$$\hat{R}^2 = S_{12} S_{22}^{-1} S_{21} / S_{11} \doteq 0.0182,$$

$$F = \frac{\hat{R}^2}{1 - \hat{R}^2} \cdot \frac{n - m}{m - 1} \doteq 0.2591 \ (m = 2, n = 16).$$

又 $F_{0.1}(m - 1, n - m) = F_{0.1}(1, 14) = 3.10$，$F <$

$F_{0.1}(1,14)$,应接受 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2$, $\alpha=0.1$.

3.2　系统误差的一致性检验($H_2:\beta_1=\beta_2$)

$$y_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\varepsilon_{ij}(i=1,2,\cdots,16;j=1,2);$$

$$SS_B=n\sum_{j=1}^{m}(\bar{y}_{\cdot j}-\bar{y}_{\cdot\cdot})^2\doteq 4.2631;$$

$$SS_A=m\sum_{i=1}^{n}(\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot\cdot})^2\doteq 11748.8750;$$

$$SS_e=\sum_i\sum_j(\bar{y}_{ij}-\bar{y}_{i\cdot}-\bar{y}_{\cdot j}+\bar{y}_{\cdot\cdot})^2$$

$$=SS_{总}-SS_A-SS_B$$

$$\doteq 11774.8750-11748.8750-4.2631$$

$$=21.7369;$$

$$F=\frac{SS_B/(m-1)}{SS_e/[(m-1)(n-1)]}=(n-1)\frac{SS_B}{SS_e}\doteq 2.9418,$$

$$F_{0.05}(m-1,(m-1)(n-1))=F_{0.05}(1,15)=4.54.$$

当 $F<4.54$,应接受 $H_2:\beta_1=\beta_2,\alpha=0.05$.

3.3　对应测量的不确定度结果

由(1),(2)知,用本文方法估计各时刻燃烧室压力并给出相应的测量不确定度,列在附表中.其中压力估计 $=(y_{i1}+y_{i2})$,对应测量不确定度 $=|y_{i2}-y_{i1}|/2$,其结果见表1,此处是 $m=2$ 时的一个实例,计算很简单;m 较大时计算会繁杂一些,但估计的精度会更高,即不确定度会更小.

表1　原始数据、压力估计和对应不确定度

Table 1　Primedata, Pressure estimation and the according uncertainty degree

时刻 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
仪器1	217	187	183	175	185	156	170	166	140	172	217	186	179	177	183	156
仪器2	215	187	183	174	183	154	167	169	139	170	214	186	180	176	185	155
压力估计	216	187	183	174.5	184	155	168.5	167.5	139.5	171	215.5	186	179.5	176.5	184	155.5
不确定度	1	0	0	0.5	1	1	1.5	1.5	0.5	1	1.5	0	0.5	0.5	1	0.5

参考文献:

[1]　刘智敏.误差分布论[M].北京:原子能出版社,1988.

[2]　张新育.单向随机效应误差方差带线性约束的齐性检验[J].郑州工业大学学报,2000,21(3):52-53.

[3]　张尧庭,方开泰.多元统计分析引论[M].北京:科学出版社,1983.494.

[4]　王松桂.线性模型的理论及其应用[M].合肥:安徽教育出版社,1987.

A Way of Estimation of Uncertainty of Experimental Data Gained Simultaneously by Many Measurers

ZHANG Xin-yu[1], SUN Fu-zhao[2], WANG Shu-seng[1]

(1. Department of Engineering Mechanics, Zhengzhou University, Zhengzhou 450002, China; 2. Department of Physics, Zhumadian Normal College, Zhumadian 463000, China)

Abstract: This paper is based on the simultaneous experimental data gained by many measures simultaneously in the same experiment, building up a single-classification random effect model, $y_{ij}=\mu+\mu_i+\varepsilon_{ij}$, $i=1,\cdots,n$, $j=1,\cdots,m$, ε_{ij}, $iid.\sim N(0,\sigma_j^2)$, μ_i, $iid.\sim N(0,\sigma_0^2)$ 且 ε_{ij}与μ_i 独立, $i=1,\cdots,n$, $j=1,\cdots,m$, thus giving a kind A of uncertainty in equated test and way of estimation by each measurer in random trial.

Key words: random trial; equation test; uncertainty of A kind