文章编号：1007－6492(2001)02－0092－02

求解大型稀疏问题的向量式 ABS 算法

安学庆[1]，王国富[2]，李学相[1]

(1.郑州工业大学数理力学系，河南 郑州 450002；2.安阳大学，河南 安阳 453002)

摘 要：在基本 ABS 算法的基础上，利用 ABS 算法的特性给出了一类求解大型稀疏问题的向量式 ABS 算法，克服了原 ABS 算法中修正投影矩阵带来的运算量及存贮量大等缺点，讨论了算法的收敛性和稳定性.实验表明，该算法具有收敛速度快、计算精度高、运算量及存储量小等特点.

关键词：ABS 算法；投影矩阵；搜索向量

中图分类号：O 241.6 文献标识码：A

0 引言

考虑如下大型稀疏问题

$$AX = b\ , \tag{1}$$

其中：$X\in R^n$，$b\in R^m$，$A\in R^{m\times n}$，$m<n$，A 为稀疏矩阵，且 A 的秩 $\leqslant m$.

在基本 ABS 算法中[1]，为了得到下一次搜索方向，需要用到下列矩阵修正公式

$$H_{i+1} = H_i - H_i a_i \omega_i^{\mathrm T} H_i , \tag{2}$$

其中：H_1 是非奇异矩阵，且 $\omega_i^T H_i a_i = 1$.

一般情形下，可取 $\omega_i = u_i/(u_i^{\mathrm T}H_i a_i)$，其中 $u_i^{\mathrm T}H_i a_i\neq 0$，于是式(2)化为

$$\begin{aligned} H_{i+1}^{\mathrm T} &= [H_i - H_i a_i u_i^{\mathrm T} H_i/(u_i^{\mathrm T}H_i a_i)]^{\mathrm T} = \\ &[H_i(I - a_i u_i^{\mathrm T} H_i/(u_i^{\mathrm T}H_i a_i))]^{\mathrm T} = \\ &[I - H_i^{\mathrm T} u_i a_i^{\mathrm T}/(u_i^{\mathrm T}H_i a_i)]H_i^{\mathrm T}. \end{aligned} \tag{3}$$

根据 ABS 算法，搜索向量取成 $P_{i+1} = H_{i+1}^{\mathrm T} Z_{i+1}$，由式(3)则有

$$P_{i+1} = [I - H_i^{\mathrm T} u_i a_i^{\mathrm T}/(u_i^{\mathrm T}H_i a_i)]H_i^{\mathrm T} Z_{i+1},$$

记 $H_i^{\mathrm T} u_i = P_i^{(1)}$，$H_i^{\mathrm T} Z_{i+1} = P_i^{(2)}$，于是 P_{i+1} 的一般修正公式为

$$P_{i+1} = [I - P_i^{(1)} a_i^{\mathrm T}/(P_i^{(1)\mathrm T} a_i)]P_i^{(2)}, \tag{4}$$

若要使式(4)成为第 $i+1$ 步搜索矢量，$P_i^{(1)}$ 及 $P_i^{(2)}$ 必须满足下列条件[2]：

(Ⅰ) $a_i^{\mathrm T} P_i^{(1)} \neq 0$；

(Ⅱ) $P_i^{(1)}, P_i^{(2)} \in \mathrm{NULL}(A_{i-1})$；

(Ⅲ) $P_i^{(2)} \notin \mathrm{NULL}[I - P_i^{(1)} a_i^{\mathrm T}/(P_i^{(1)\mathrm T} a_i)]$；

(Ⅳ) $P_{i+1}^{\mathrm T} a_{i+1} \neq 0$.

1 向量式 ABS 算法

对上述条件进行简化：因为方程组 $[I - P_i^{(1)} a_i^{\mathrm T}/(P_i^{(1)\mathrm T} a_i)]P_i^{(2)} = 0$ 的解为 $P_i^{(2)} = qP_i^{(1)}$ ($q\in R^1$)，所以(Ⅲ)可简化为 $P_i^{(1)}$，$P_i^{(2)}$ 线性无关，而(Ⅰ)，(Ⅱ)简化为 $P_i^{(1)}$，$P_i^{(2)}$ 为第 i 步的搜索矢量，这样上面的条件化成以下形式：

(Ⅰ) $P_i^{(1)}$，$P_i^{(2)}$ 为第 i 步的搜索矢量，且线性无关；

(Ⅱ) $P_{i+1}^{\mathrm T} a_{i+1} \neq 0$.

可利用式(4)以下列方式构造每步搜索矢量：

$$P_{k+1}^{(i)} = [I - P_k^{(1)} a_k^{\mathrm T}/(P_k^{(1)\mathrm T} a_k)]P_k^{(i+1)},$$
$$(i = 1,2,\cdots,n-k+1)$$

(不妨设 $P_k^{(1)\mathrm T} a_k \neq 0$；$k = 1,2,\cdots,m+1$)， (5)

则求解问题(1)的向量式 ABS 算法如下.

(1) 取 n 个线性无关的初始向量 $P_1^{(1)}$，$P_1^{(2)}$，…，$P_1^{(n)}$ 及初始点 X_1，置 $i=1$.

(2) 选取向量 $P_i^{(k)}$，使 $P_i^{(k)\mathrm T} a_i \neq 0$，并按下列公式构造搜索向量($k\in J = \{1,2,\cdots,n-i+1\}$)($j\neq k$)

$$P_{i+1}^{(j)} = [I - P_i^{(k)} a_i^{\mathrm T}/(P_i^{(k)\mathrm T} a_i)]P_i^{(j)}, \tag{6}$$

若不存在这样的 $P_i^{(k)}$，则 a_i 是 A 的第 1 列第 $i-1$ 行向量的线性组合并转步骤 4.

(3) 线搜索 $X_{i+1} = X_i + \alpha_i P_i^{(k)}$，其中，$\alpha_i = (b_i - a_i^{\mathrm T} X_i)/(P_i^{(k)\mathrm T} a_i)$.

收稿日期：2001－02－01；修订日期：2001－03－30

作者简介：安学庆(1964－)，女，河南省郑州市人，郑州工业大学讲师，主要从事计算数学方面的研究.

(4) 把 $i+1$ 赋给 i 后转步骤 2.

2 算法的收敛性证明

定理 1　若向量组 $\boldsymbol{P}_i^{(1)},\boldsymbol{P}_i^{(2)},\cdots,\boldsymbol{P}_i^{(n-i+1)}$ 线性无关，则按式(5)构成的向量 $\boldsymbol{P}_{i+1}^{(1)},\boldsymbol{P}_{i+1}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{P}_{i+1}^{(n-i)}$ 也是线性无关的(假设 $\boldsymbol{P}_i^{(1)\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_i\neq 0$)，并且若 $\boldsymbol{a}_{i+1}$ 不是 A 的前 $E(E=1,2,\cdots,i)$ 行的线性组合，那么存在 $j\in J=\{1,2,\cdots,n-i\}$，使得 $\boldsymbol{P}_{i+1}^{(j)\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_{i+1}\neq 0$.

证明：考虑 $\sum_{j=1}^{n-i}\beta_{i+1}^{(j)}\boldsymbol{P}_{i+1}^{(j)}=0$，将式(5)代入，得

$$\sum_{j=1}^{n-i}\beta_{i+1}^{(j)}\boldsymbol{P}_{i+1}^{(j+1)}-\Big[\sum_{j=1}^{n-i}\beta_{i+1}^{(j)}\boldsymbol{P}_i^{(j+1)}\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}/(\boldsymbol{P}_i^{(j)\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_i)\Big]\boldsymbol{P}_i^{(1)}=0\ .$$

由于 $\boldsymbol{P}_i^{(1)},\boldsymbol{P}_i^{(2)},\cdots,\boldsymbol{P}_i^{(n-i+1)}$ 线性无关，所以

$$\beta_{i+1}^{(j)}=0\quad(j=1,2,\cdots,n-i)\ ,$$

即 $\boldsymbol{P}_{i+1}^{(j)}(j=1,2,\cdots,n-i)$ 是线性无关的，又因为

$$\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{i+1}^{(j)}=\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_i^{(1)}\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}/(\boldsymbol{P}_i^{(1)\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_i)]\boldsymbol{P}_i^{(j+1)}=\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i^{(j+1)}-\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i^{(1)}\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}/(\boldsymbol{P}_i^{(1)\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{P}_i^{(j+1)}=0\ ,$$

当 $L<i$ 时，

$$\boldsymbol{a}_L^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_{i+1}^{(j)}=\boldsymbol{a}_L^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_i^{(1)}\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}/(\boldsymbol{P}_i^{(1)\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_i)]\boldsymbol{P}_i^{(j+1)}=\boldsymbol{a}_L^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i^{(j+1)}-\boldsymbol{a}_L^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i^{(1)}\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}/(\boldsymbol{P}_i^{(1)\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_i)\boldsymbol{P}_i^{(j+1)}.$$

由于 $\boldsymbol{P}_i^{(j)}(j=1,2,\cdots,i\cdots)\in\mathrm{NULL}(\boldsymbol{A}_{i-1})$，故上式为 0，因此，若 $\boldsymbol{a}_{i+1}$ 不是 $A_E(E=1,2,\cdots,i)$ 的线性组合，则必存在 $j\in J=\{1,2,\cdots,n-i\}$，使得 $\boldsymbol{P}_{i+1}^{(j)\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_{i+1}\neq 0$，这是由于 $\boldsymbol{P}_{i+1}^{(j)}(j=1,2,\cdots,n-i)$ 是 $\mathrm{NULL}(\boldsymbol{A}_i)$ 的一组基向量.

利用定理 1，不难得出如下结论.

定理 2　利用算法 1 求解方程组(1)，所得到的通解为

$$X^*+[P_{m+1}^{(1)},P_{m+1}^{(2)},\cdots,P_{m+1}^{(n-m)}]\,q\quad(q\in R^{(n-m)})\ .$$

3 算法讨论

算法 1 若不考虑主元选取，那么运算量为 $\sum_{i=1}^{m}2n(n-i)=mn(2n-m)$，事实上，若不考虑主元选取，初始向量仅需要 m 个，这样总运算量为 $\sum_{i=1}^{n}2n(m-i)=nm^2$，而基本 ABS 算法的总运算量为 $4n^2m$，显然算法 1 的运算量要比基本 ABS 算法的运算量少得多，另外也减少了存贮量，而这对求解大型稀疏问题是非常有利的.

参考文献：

[1] ABAFFY J. Some Special case of the ABS class for band matrices. proceedings of the Fourth Conference on Automata Languages and Mathematical Systems[M]. Budapest：University of Economics，1986.

[2] ABAFFY J. Preliminary test results with some algorithms of the ABS class[J]. Technical Report，1987，193：97－103.

[3] ABAFFY J，BROYDEN C G，SPEDICATO E. A class of direct methods for linear system Ⅱ[J]. Softmat Report，1982，21：45－48.

A Vector ABS Method for Solving Huge and Sparse System

AN Xue－qing[1]，WANG Guo－fu[2]，LI Xue－xiang[1]

(1. Department of Mathematics，Physics & Mechanics，Zhengzhou University of Technology，Zhengzhou 450002，China；2. Anyang University，Anyang 453003，China)

Abstract：In this paper，a vector ABS method is given for solving huge and sparse system by using ABS algorithm. The huge operation and huge memory capacity is overcome by using projection matrix. The convergence and stability of this algorithm are discussed. The numerical experiments show that this method has certain practical value.

Key words：ABS method；projection matrix；locating vector