2001 年　6 月
第 22 卷　第 2 期

郑 州 工 业 大 学 学 报
Journal of Zhengzhou University of Technology

Jun.　2001
Vol.22　No.2

文章编号:1007－6492(2001)02－0057－02

对最大化指派问题的匈牙利解法的一点改进

杨光煜[1], 张雷顺[2]

(1.天津财经学院信息系,天津 300040;2.郑州工业大学水利与环境工程学院,河南 郑州 450002)

摘　要:针对指派问题中最小化问题的匈牙利解法,提出一种不同于传统解法的最大化问题的求解方法.该方法不必一开始就去用新的系数矩阵代替原系数矩阵,而是可直接在原系数矩阵上进行求解,只是求解过程中的一些原则与最小化问题的求解原则有所不同.由于其解题步骤的多少与先后同最小化问题解题步骤的多少与先后是相对应的,所以可用同一段带系数的程序去解决最大化、最小化两个不同的问题.此方法简捷、直观,为计算机上解法的实现提供了方便途径.

关键词:指派问题;匈牙利解法;改进

中图分类号:O 224　　文献标识码:A

1　指派问题

指派问题系指:有 n 项任务需 n 个人完成,这 n 个人中每一个人都具有完成 n 项任务中任一项的能力,但由于任务的性质和人员的特长不同,应指派哪个人去完成哪项任务,才能使总的效率最高[1].

以 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 代表 n 个人,$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 代表 n 项任务,$C_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 代表第 i 个人去完成第 j 项任务时的效益.效益可代表完成任务所带来的效益,也可代表效益的参数,如所耗费的时间或成本等.由于效益所代表的具体内容不同,如何使总的效益最高的问题也就相应地表现为最大化和最小化问题.如当效益 C_{ij} 代表第 i 个人去完成第 j 项任务所能带来的效益时,此指派问题为最大化问题.而当 C_{ij} 代表所需时间或所耗成本时,指派问题则变成了最小化问题.

2　匈牙利解法及最大化指派问题变形解法

效益元素 $C_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$ 组成的方阵,称为系数矩阵,简记为 $\boldsymbol{C}$.

现在假设 C_{ij} 代表第 i 个人完成第 j 项任务所需的时间参数,此指派问题为:适当分配任务,使完成 n 项任务所需总时间最短,即最小化问题.匈牙利解法依据‘在系数矩阵中任何行或列加上或减去同一常数并不改变分配方案’的原则[2],在保证‘系数矩阵元素不能出现负数’和‘变换使每行每列至少有一个零元素’的前提下,对系数矩阵作适当变换后,选取新矩阵中的零元素,旨在选中完成某任务花费时间最短的某人,以得到问题的最优解.根据每个人只能完成一项任务,则零元素只能选不同行且不同列的元素,引入矩阵 X,其元素为 $X_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$.此时,对应被选中零的位置的 X_{ij} 取为 1,其它的为零.如选中的零元素恰为 n,则可求得最优解.零的个数少于 n,则再进行适当变换,直到划出的零元素个数恰为 n.

当 C_{ij} 代表第 i 个人完成第 j 项任务所能带来的效益时,此指派问题为:适当分配任务,使完成 n 项任务所获总效益最大,即最大化问题.匈牙利解法的处理方法是:首先针对系数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 作一个矩阵 $\boldsymbol{B}$,其元素为 $b_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,n)$,且 $b_{ij}=M-C_{ij}$,M 为一个充分大的正数,使得所有的 b_{ij} 均大于或等于零,一般取 C_{ij} 中最大者为 M,然后用匈牙利最小化法求 $\boldsymbol{B}$ 的最优解.

3　改进后的最大化指派问题解法

最大化指派问题可描述如下:

收稿日期:2001－01－02;修订日期:2001－03－10

作者简介:杨光煜(1966－),女,辽宁省图县人,天津财经学院讲师,硕士,主要从事面向对象信息系统分析与设计方面的研究.

令 $X_{ij}=\begin{cases}0, A_k \text{ 不去完成 } B_j;\\ 1, A_i \text{ 去完成 } B_j^*,\end{cases}$

式中：$i=1,2,\cdots,n$；$j=1,2,\cdots,n$.

$$\text{st.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}=1\ (i=1,2,\cdots,n);\\ \sum_{i=1}^{n} X_{ij}=1\ (j=1,2,\cdots,n);\\ X_{ij}=0 \text{ 或 } 1\ (i,j=1,2,\cdots,n);\end{cases}$$

$$\max S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}.$$

此方法不必一开始就用新的系数矩阵代替原系数矩阵，而是直接在原系数矩阵上进行修改．修改过程中的一些原则与最小化问题有所不同．

修改系数矩阵的原则是：在最小化问题中，系数矩阵不能出现负数，在最大化问题中，修改后的矩阵不能出现正元素，可出现零．

例1 以

$$\begin{bmatrix}15 & 2 & 4 & 13\\ 7 & 13 & 3 & 2\\ 9 & 4 & 2 & 5\\ 6 & 5 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

作为系数矩阵，求最大化指派问题最优解．

解：第一步为修改系数矩阵．

在每行都减去该行中最大元素，每列都减去该列中最大元素后，系数矩阵变为

$$\begin{bmatrix}0 & -13 & -7 & 0\\ -6 & 0 & -6 & -9\\ 0 & -5 & -3 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

第二步为求最优化解．

选取新矩阵的零元素，以得到问题的最优解．根据每个人只能完成一项任务，每项任务只能由一个人完成的前提，则零元素只能选不同行且不同列的元素．此时对应被选中的零元素记为“$*$”，其对应的 X_{ij} 等于1，其它的 X_{ij} 等于零．于是，有

$$\begin{bmatrix}0 & -13 & -7 & *\\ -6 & * & -6 & -9\\ * & -5 & -3 & -2\\ 0 & -1 & * & 0\end{bmatrix},$$

如此划出的零元素为 n 个，则便可求得最优解．最优解为 $X_{14}=X_{22}=X_{31}=X_{43}$，其余 $X_{ij}=0$．最优值为 $\max S=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} C_{ij}X_{ij}=37$.

如果划出的零元素少于 n 个，那此，可转入第三步．

例2 以

$$\begin{bmatrix}-5 & * & -2 & 0 & -2\\ -2 & -3 & * & 0 & 0\\ 0 & -8 & -3 & -5 & -3\\ -9 & -8 & 0 & * & -4\\ * & -4 & -4 & -4 & *\end{bmatrix}$$

为系数矩阵，求最优解．

解 采用例1第一步和第二步的处理方法，得

$$\begin{bmatrix}-5 & * & -2 & 0 & -2\\ -2 & -3 & 0 & * & 0\\ 0 & -10 & -5 & -5 & -5\\ -9 & -8 & * & 0 & -4\\ 8 & -6 & -3 & -6 & -2\end{bmatrix},$$

第三步为继续修改系数矩阵．

此时，解得‘$*$’号的个数少于 n 个，为此可转入第三步．先找出无‘$*$’号的行；然后找出该行有零的列；最后找出该列有‘$*$’号的行；重复后二步，直到找不出满足要求的列和行；对找到的行和没有找到的列的交叉元素加以比较，找出最大数；找到的行各元素分别减去此数，找到的列分别加上此数，即得

$$\begin{bmatrix}-7 & * & -2 & 0 & -2\\ -4 & -3 & * & 0 & 0\\ * & -8 & -3 & -5 & -3\\ -11 & -8 & 0 & * & -4\\ 0 & -4 & -1 & -4 & *\end{bmatrix}.$$

此时划出的‘$*$’号恰为 n 个，即可求最优化解．最优解为 $X_{12}=X_{23}=X_{31}=X_{44}=X_{55}=1$，最优值 $\max S=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} C_{ij}X_{ij}=41$.

4 结束语

用匈牙利基本解法的变形解法来解最大化问题，是在基本解法的第一步前又增加了一个解题步骤．这样，两种解题方法的步骤不一样，若用同一段程序来解决问题，就相应地要复杂、曲折，程序代码也不再直观，既增加了代码的长度，又降低了效益．修改后的解法为在计算机上算法的实现提供了方便，由于此最大化问题的求解步骤的多少与先后同匈牙利最小化问题求解的解题步骤的多少与先后是相对应的，不必像变形匈牙利解法那样去建立新的系数矩阵．所以我们在编程序时，可以用以实参代替形象的方法，用同一段带参数的程序去解决最大化、最小化两个不同的问题．

（下转64页）

（上接 58 页）

参考文献：

[1] 胡运权.运筹学教程[M].北京:清华大学出版社，1998.

[2] 王永现.运筹学[M].北京:清华大学出版社，1993.

Improvement of Hungary Solution for the Maximum Assigned Problem

YANG Guang – yu[1]，ZHANG Lei – shun[2]

(1. Information Department, Tianjin Finance & Economy Insititute, Tianjin 300040, China; 2. College of Hydraulic & Environmental Engineering, Zhengzhou University of Technology, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: Based on Hungary solution for the minximum assigned problem，this paper puts forward an solution for the maximum problem which is different from the traditional solution. This solution can solve problem by original coefficient matrix directly. Instead of replacing the original coefficient matrix with new coefficient matrix from beginning，but some principles in the course of solution are different from the minximum problem. Because the number of procedure and the order of solution are always correspomding with that of the minximum problem，we can make use of the program of the same segment with coefficient to solve the maximum and minximum problem. This solution is short – cut and audio – visual，and provides the comvenient approach for realizing the solution by computer.

Key words: assigned problem; Humgary solution; improvement