文章编号:1007-6492(2001)02-0023-03

对偶模糊矩阵方程

赵万忠[1],赵颖涛[2]

(1.郑州工业大学数理力学系,河南 郑州 450002;2.河南雪城科技股份有限公司,河南 郑州 450002)

摘 要:讨论了对偶模糊矩阵方程解的性质,提出了最小解 M 的概念,给出了操作十分简便的表上作业求法.提出了极大解 X_i 的概念,并给出了对偶模糊矩阵方程解的结构定理 $Я=\bigcup_{i=1}^{k}\{X \mid M\subseteq X\subseteq X_i\}$ 与有解的充分必要条件,$Я\neq\Phi\Leftrightarrow M$ 是其最小的解.通过求解极大解矩阵及诸最简方程的极大解组合之交的最简化,给出了求诸极大解的具体方法,从而为对偶模糊矩阵方程建立了完整的理论体系.

关键词:对偶合成;对偶模糊矩阵方程;最小解;极大解;最大解矩阵
中图分类号:O 153 文献标识码:A

1 模糊矩阵的对偶合成

定义1 设 $A=(a_{il})_{m\times k}$,$B=(b_{lj})_{k\times n}$ 为模糊矩阵,称 $A*B=(c_{ij})_{m\times n}$;$c_{il}=\bigwedge_{l=1}^{k}(a_{il}\vee b_{lj})$ 为 A 与 B 的对偶合成[1],则以下结论是明显的.

命题1 ①$(A*B)^C=A^C\circ B^C$;②$A*(B\cup C)=(A*B)\cup(A*C)$;③$A*(B\cap C)=(A*B)\cap(A*C)$;④$A\subseteq B\Rightarrow A*C\subseteq B*C$.

2 对偶模糊矩阵方程

定义2 设 $R=(r_{ij})_{m\times n}$,$S=(s_1,\cdots,s_n)'$ 为已知模糊矩阵,$X=(x_1,\cdots,x_n)'$ 为未知模糊矩阵.则称

$$R*X=S \tag{1}$$

为对偶模糊矩阵方程[1].满足式(1)的 X 叫式(1)的解.由式(1)的全部解组成的集叫式(1)的解集,记作 $Я$.含于式(1)的所有解的解叫式(1)的最小解.若 $X_0\in Я$,而对以 X_0 为真子集的任何 X 皆有 $X\overline{\in} Я$,则称 X_0 为式(1)的极大解.以下结果是明显的.

命题2 ①若 $X_t\in Я$,$t\in T$,则 $\bigcap_{t\in T}X_t\in Я$;②若 $X_1,X_2\in Я$ 且 $X_1\subseteq X_2$,则对任何满足 $X_1\subseteq X\subseteq X_2$ 的 X,皆有 $X\in Я$;③若 $Я\neq\Phi$,则 $\bigcap_{X\in Я}X$ 是式(1)的最小解.于是有如下式(1)的解的结构定理.

定理1 设 M 是式(1)的最小解,$X_1,\cdots,X_k$ 是式(1)的全部极大解,则

$$Я=\bigcup_{i=1}^{k}\{X \mid M\subseteq X\subseteq X_i\},$$

可见解对偶模糊矩阵方程,关键在于求最小解及全部极大解.

3 最简单情形

当 $R=(r_1,\cdots,r_n)$,$S=(s)$ 时,式(1)化为

$$(r_1\vee x_1)\wedge,\cdots,\wedge(r_j\vee x_j)\wedge,\cdots,\wedge(r_n\vee x_n)=s, \tag{2}$$

对此最简情形,显然有以下命题.

命题3 ①$Я\neq\Phi\Leftrightarrow$至少有一个 $r_j\leqslant s$;②$Я\neq\Phi\Leftrightarrow M=(m_1,\cdots,m_n)'$ 是式(2)的最小解,其中,

$$m_j=\begin{cases}s, & r_j<s;\\ 0, & r_j\geqslant s;\end{cases}\quad j=1,2,\cdots,n,$$

③对应于每个 $r_j\leqslant s$,式(2)有极大解 $X_j=(1,\cdots1,s,1,\cdots,1)'$.其中 s 是第 j 个坐标.从而式(2)之极大解的个数等于不大于 s 的 r_j 的个数.

4 一般情形

将

$$R*X=S \tag{3}$$

改为如下等价形式:

$$\bigwedge_{j=1}^{n}(r_{ij}\vee x_j)=s_i(i=1,2,\cdots,m). \tag{4}$$

收稿日期:2001-01-04;修订日期:2001-02-28
作者简介:赵万忠(1940-),男,河南省虞城县人,郑州工业大学副教授,主要从事模糊拓扑方面的研究.

4.1 关于最小解

设 $M_i=(m_{il},\cdots,m_{ij},\cdots,m_{in})'$是式(4)之第 i 个方程的最小解，$i=1,2,\cdots,m$. 令

$$M=\bigcup_{i=1}^{m}M_i.$$

定理 2 ①$Я\neq\Phi\Leftrightarrow M$ 是式(3)之最小解；②设 $M=(m_1,\cdots,m_j,\cdots,m_n)'$，

则
$$m_j=\begin{cases}\vee\ \{s_i\mid s_i>r_{ij}\}\ ;\\ 0\ (s_i\leqslant r_{ij},i=1,2,\cdots,m),\end{cases}$$

式中：$j=1,2,\cdots,n$.

①的证明,充分性自明. 现证必要性：首先,对任 $X\in Я\Rightarrow X$ 是式(4)中每一方程之解$\Rightarrow X\supseteq M_i$，$i=1,2,\cdots,m\Rightarrow X\supseteq\bigcup_{i=1}^{m}M_i$. 其次,由 $X\in Я$，$X\supseteq\bigcup_{i=1}^{m}M_i\supseteq M_i$，$i=1,2,\cdots,m$ 及命题 2 中的②知，M 是式(4)中每一个方程之解,从而，$M\in Я$.

4.2 关于极大解

命题 4 设 M 是式(3)之最小解，X_i 是式(4)中第 i 个方程之极大解,则 $\bigcap_{i=1}^{m}X_i\in Я\Leftrightarrow X_i\supseteq M$，$i=1,2,\cdots,m$. 事实上,由 $X_i\supseteq\bigcap_{i=1}^{m}X_i\supseteq M$ 及命题 2 中的②即知充分性成立.

定理 3 ①式(1)的每个极大解 X 皆可表示为 $X=\bigcap_{i=1}^{m}X_i$，其中 X_i 是式(4)中第 i 个方程之某一极大解；②在 $\{\bigcap_{i=1}^{m}X_i\mid X_i\supseteq M$ 是式(4)中第 i 个方程之极大解$\}$中,去掉重复者及具有包含关系的较小者之后,就是式(1)的全部极大解.

关于①的证明. 由 $X\in Я\Rightarrow X$ 是式(4)中每一方程之解$\Rightarrow$对任意 $i=1,2,\cdots,m$，存在第 i 个方程的某一极大解 $X_i=(1,\cdots,1,s_i,1,\cdots,1)'$($s_i$ 是第 j_i 个坐标)，使 $X\subseteq X_i\Rightarrow X\subseteq\bigcap_{i=1}^{m}X_i$.

设 x_j 与 x_{ij} 分别是 X 与 X_i 的第 j 个坐标,则

$$x_j\leqslant\bigwedge_{i=1}^{m}x_{ij}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

注意
$$x_{ij}=\begin{cases}s_i,\ r_{iji}\leqslant s_i\ ;\\ 1,\ r_{iji}>s_i,\end{cases}$$

若有 j_0 使 $x_{j_0}<\bigwedge_{i=1}^{m}x_{ij_0}$，则设 $i=i_p$，$p=1,2,\cdots,k$ 时，

$$x_{i_pj_0}=s_{i_p}\Rightarrow r_{i_pj_0}\leqslant s_{i_p},\qquad(5)$$

设 $i\neq i_p$，$p=1,2,\cdots,k$ 时，

$$x_{ij_0}=1\Rightarrow r_{ij_0}>s_i,\qquad(6)$$

则

$$x_{j_0}<\bigwedge_{p=1}^{k}s_{i_p}\leqslant s_{i_p},\quad p=1,2,\cdots,k,\qquad(7)$$

$$\left.\begin{array}{r}X\in Я\Rightarrow r_{ij_0}\vee x_{j_0}\geqslant s_i,i=1,2,\cdots,m\\ \text{式(7)}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}r_{i_pj_0}\geqslant s_{i_p},p=1,2,\cdots,k.\\ \text{式(5)}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$r_{i_pj_0}=s_{i_p},\quad p=1,2,\cdots,k.$$

由式(6)$\Rightarrow$式(4)中,序号不是 $i_p(p=1,2,\cdots k)$的那些方程之解的第 j_0 个坐标可任取. 令

$$Y=(x_1,\cdots,x_{j_0-1},\bigwedge_{p=1}^{k}s_{i_p},x_{j_0+1},\cdots,x_n)',$$

则 Y 以 X 为真子集. 而且易验证 $X\in Я$,这与 X 为极大解矛盾. 故 $x_j\geqslant\bigwedge_{i=1}^{m}x_{ij}$，$j=1,2,\cdots,n\Rightarrow X\supseteq\bigcap_{i=1}^{m}x_i$. 综上,有 $X=\bigcap_{i=1}^{m}X_i$,证毕.

4.3 极大解求法

将同一论域上的若干模糊集放在一起叫该论域上的一个模糊集组合. 无重复元且任二元无包含关系的模糊集组合叫最简模糊集组合,将模糊集组合中的重复元及具有包含关系的较小元去掉叫化简. 任何模糊集组合皆可通过化简使之成为最简单情形. 设$[A_1,\cdots,A_m]$,$[B_1,\cdots,B_n]$为同一论域上的二模糊集组合,规定它们的交为$[A_1,\cdots,A_m]\cap[B_1,\cdots,B_n]\equiv[A_1\cap B_1,A_1\cap B_2,\cdots,A_1\cap B_n,\cdots,A_m\cap B_1,A_m\cap B_2,\cdots,A_m\cap B_n]$,模糊集组合之交具有交换率与结合率,同时还具有吸收率. 即若 $B\subseteq A_i$,则$[B]\cap[A_1,\cdots,A_m]=[B]$. 设 $M=(m_1,\cdots,m_n)$为式(3)之最小解,令

$$r_{ij}^{\,*}=\begin{cases}s_i & s_i\geqslant r_{ij}\vee m_j\ ;\\ 1 & s_i<r_{ij}\vee m_j,\end{cases}$$

式中：$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$；$R^*=(r_{ij}^{\,*})_{m\times n}$ 则 R^* 的第 i 行的每个 $r_{ij}^{\,*}=s_i$ 都可对应式(4)中第 i 个方程的一个包含 M 的极大解

$$X_{ij}=(1,\cdots,1,s_i,1,\cdots,1)',$$

其中：s_i 是第 j 个坐标. 因此称 R^* 为式(3)的极大解矩阵.

设 $X_{ij_1}\cdots X_{ij_i}$是式(4)中第 i 个方程包含 M 的全部极大解,显然 $X_{ij_1}\cap X_{ij_2}\cap\cdots\cap X_{ij_i}$ 恰为 R^* 的第 i 行. 称$[X_{ij_1},X_{ij_2},\cdots,X_{ij_i}]$为第 i 个方程的极大解组合.

命题 5 设$[X_{ij_1},X_{ij_2},\cdots,X_{ij_i}]$是式(4)之第 i 个方程之极大解组合,则 $\bigcap_{i=1}^{m}[X_{ij_1},\cdots,X_{ij_i}]=\{\bigcap_{i=1}^{m}X_i\mid X_i\supseteq M$ 是第 i 个方程之极大解$\}$. 于是将 $\bigcap_{i=1}^{m}[X_{ij_1},\cdots,X_{ij_i}]$最简化即得式(3)的全部极大解.

由于 X_{ij}除第 j 个坐标为 s_i 外,其他坐标全为

1,为书写方便,记 $X_{ij}=j(s_i)$,即

$$j(s_i)\equiv(1,\cdots,1,s_i,1,\cdots,1)\ .$$

例： 解对偶模糊矩阵方程

$$\begin{bmatrix}0.1 & 0.4 & 0.9 & 0.8\\ 0.3 & 0.7 & 0.6 & 0.7\\ 0.2 & 0.4 & 0.1 & 0.5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.7\\ 0.6\\ 0.5\end{bmatrix}.$$

解： 通常取如下的表上作业法：

M	0.7	0.7	0.5	0	$\in Я$
	0.1	0.4	0.9	0.8	0.7
$R\mid S$	0.3	0.7	0.6	0.7	0.6
	0.2	0.4	0.1	0.5	0.5
	0.7	0.7	1	1	
R^*	1	1	0.6	1	
	1	1	0.5	0.5	

诸方程极大解组合作交并最简化

$[1(0.7),2(0.7)]\cap[3(0.6)]\cap[3(0.5),4(0.5)]=$
$[1(0.7),2(0.7)]\cap[3(0.5),3(0.6)\cap 4(0.5)]=$
$[1(0.7)\cap 3(0.5),2(0.7)\cap 3(0.5),1(0.7)\cap 3(0.6)\cap 4(0.5),2(0.7)\cap 3(0.6)\cap 4(0.5)]=$
$[(0.7,1,0.5,1)',(1,0.7,0.5,1)';(0.7,1,0.6,0.5)',(1,0.7,0.6,0.5)']$,

极大解为

$X_1=(0.7,1,0.5,1)',X_2=(1,0.7,0.5,1)'$,
$X_3=(0.7,1,0.6,0.5)',X_4=(1,0.7,0.6,0.5)'$.

于是　$$Я=\bigcup_{i=1}^{4}\{X\mid M\subseteq X\subseteq X_i\}=\left\{\begin{bmatrix}0.7\\ [0.7,1]\\ 0.5\\ [0,1]\end{bmatrix},\begin{bmatrix}[0.7,1]\\ 0.7\\ 0.5\\ [0,1]\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0.7\\ [0.7,1]\\ [0.5,0.6]\\ [0,0.5]\end{bmatrix},\begin{bmatrix}[0.7,1]\\ 0.7\\ [0.5,0.6]\\ [0,0.5]\end{bmatrix}\right\},$$

而对偶模糊矩阵方程

$$\begin{bmatrix}0.2 & 0.5\\ 0.8 & 0.6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.7\\ 0.9\end{bmatrix},$$

则因 $M=(0.9,0.9)'\overline{\in}Я$,**而无解**.

参考文献：

[1] 阎家杰,赵万忠.模糊数学基础及应用初阶[M].郑州:河南教育出版社,1993.

Dual Fuzzy Matrix Equation

ZHAO Wan-zhong[1], ZHAO Ying-tao[2]

(1. Department of Mathematics, Physics & Mechanics, Zhengzhou University of Technology, Zhengzhou 450002, China; 2. Henan Snowcity Science & Technology Co. Ltd., Zhengzhou 450002, China)

Abstract: In this paper, we discuss the property of dual fuzzy matrix equation's solution and propound the concept of minimal solution M and offer the method of determining M. we propound the concept of maximal solution X_i and offer stuctural theorem of dual fuzzy matrix equation's solution $Я=\bigcup_{i=1}^{k}\{X\mid M\subseteq X\subseteq X_i\}$ and condition of equivalence under which it has solution $Я\neq\Phi\Leftrightarrow M$ is its minimal solution. Through finding maximal solution matrix and intersection of maximal solution combination, we offer method of finding maximal solutions. Finally, we establish complete theory system for dual fuzzy matrix equation.

Key words: dual composition; dual fuzzy matrix equation; minimal solution; maximal solution; maximal solution matrix