2001 年 6 月 第 22 卷 第 2 期
郑 州 工 业 大 学 学 报
Journal of Zhengzhou University of Technology
Jun. 2001 Vol.22 No.2

文章编号:1007－6492(2001)02－0020－03

Extension 集合辨析

左 静

(郑州工业大学数理力学系,河南 郑州 450002)

摘 要:Extension 集合是可拓学理论的基础概念之一.探讨 Extension 集合的特色和它与其它集合的关系,对于明晰可拓学的生存基础、研究价值和发展前景非常重要.通过比较 3 种集合对论域元素的识别与分类原则,指出 Fuzzy 集合 Extension 集合均以 Cantor 集合为基础,但各自又具有其它集合不可替代的独特之处.Extension 集合的特色在于它对论域元素潜在属性的识别角度和元素属性在特定变换下的可转换性的识别功能.

关键词:Extension 集合;Cantor 集合;Fuzzy 集合;可拓学
中图分类号:N 94;O 23 **文献标识码**:A

0 引言

可拓学是中国人创立的一个新学科,尽管可拓学的发展史仅有 10 多年,但其所取得的理论与应用研究成果显示了这个学科的强大生命力.近年来,关于可拓学的研究工作日趋活跃,并且正在走出国门,走向世界,越来越多的国内外学者加入到可拓学的研究行列.Extension 集合是可拓学[1]理论的基础概念之一,因此,正确地理解 Extension 集合概念,辨明它与 Cantor 集合、Fuzzy 集合的区别与联系,把握 Extension 集合的特色,对于可拓学学科的发展具有重要意义.

1 Extension 集合对论域元素的分类特点

Extension 集合的概念如下:

定义 1[2] 设 U 为论域,k 是 U 到实域 I 的一个映射,称

$$\tilde{A}=\{(u,y)\mid u\in U,y=k(u)\}$$

为论域 U 上的一个 Extension 集合.$y=k(u)$为 $\tilde{A}$ 的关联函数,$k(u)$为 u 关于$\tilde{A}$ 的关联度,$A=\{u\mid u\in U,k(u)\geq 0\}$为 $\tilde{A}$ 的正域,$\bar{A}=\{u\mid u\in U,k(u)\leq 0\}$为 $\tilde{A}$ 的负域,$J_0(\tilde{A})=\{u\mid u\in U,k(u)=0\}$为 $\tilde{A}$ 的零界.

记 U 上的 Extension 集合的全体为 $L(U)$.

定义 2[2] 设 $\tilde{A}\in L(U)$,T 是变换,且 $TU\subset U$,称 $A(T)=\{u\mid u\in U,k(Tu)\geq 0\}$为 $\tilde{A}$ 的关于变换 T 的正域,$\dot{A}(T)=\{u\mid u\in U,k(Tu)\leq 0\}$为 $\tilde{A}$ 的关于变换 T 的负域,$\underset{\cdot}{A}(T)=\{u\mid u\in U,k(u)\leq 0,k(Tu)\geq 0\}$为 $\tilde{A}$ 的关于变换 T 的可拓域,$A_+(T)=\{u\mid u\in U,k(u)\geq 0,k(Tu)\geq 0\}$为 $\tilde{A}$ 的关于变换 T 的稳定域.

对同一论域 U 和 U 中指定子集 A,Cantor 集合、Fuzzy 集合和 Extension 集合对论域 U 之元素 u 关于 A 的属性有各自的区分原则.

Cantor 集合:$u\in A$ 或 $u\notin A$.即仅区分是与非关系,不承认既是又非关系,也不考虑是非属性的可转换性.

Fuzzy 集合:$u\in A$ 或 $u\notin A$ 或 u 在 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$($\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 为隶属函数)程度上属于 A(记作 $u\in\underset{\sim}{A}$,($\mu_{\underset{\sim}{A}}$)),但 u 又在 $1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$程度上不属于 A(记作 $u\notin\underset{\sim}{A}$,$(1-\mu_{\underset{\sim}{A}}(u))$).即不仅区分是与非关系,还要区分处于临界状态的似是而非关系.在许多场合下,这种对临界元素关于 A 的属性的界定较 Cantor 集合更为客观.

Extension 集合:$u\in A$,但在变换 T 下,$Tu\in A$,或 $Tu\notin A$,或 $Tu\in J_0(\tilde{A})$ 或 $u\notin A$,但在变换 T 下,$Tu\in A$ 或,$Tu\notin A$,或 $Tu\in J_0(\tilde{A})$ 或 $u\in J_0(\tilde{A})$,但在变换 T 下,$Tu\in A$,或 $Tu\notin A$,或 $Tu\in$

收稿日期:2001－01－11;修订日期:2001－03－31
基金项目:河南省软科学研究计划项目(005014700)
作者简介:左 静(1955－),女,江苏省镇江市人,郑州工业大学副教授,主要从事可拓学及系统工程方面的研究.

$J_0(\tilde{A})$. 即不仅区分是与非，明确承认既是又非元素的存在(这种分类原则使得现实世界中大量存在而在 Cantor 集合分类原则下找不到自己位置的临界元素在集合论中有了立足之地)，而且着重区分元素的是非属性在变换 T 下的可转换性.

综上所述，Extension 集合对论域元素分类原则的主要特点，是在 Cantor 集合、Fuzzy 集合的是非分类原则基础上，又增加了元素的是非属性在变换 T 下的可转换性区分、既是又非元素的区分，这种区分在许多场合下是有实际意义的.

例如，设论域 U = 人的集合，A = 青年人的集合，于是 $A \subset U$.

在 Cantor 集合论中，通常按年龄界定 $A = [18,25]$，这种界定可将年龄相差甚微的人分为截然不同的两类，这在许多实际问题中是欠客观的.

在 Fuzzy 集合论中，青年人为 Fuzzy 子集 $\tilde{A}$，U 中元素 u 与 A 的关系由隶属度 $\mu_{\underset{\sim}{A}} \in [0,1]$ 表达. 设 u_1 为 18 岁差一天的人，u_2 为 25 岁多一天的人，则有 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_i) \approx 1$，$i = 1,2$. 由此可见，Fuzzy 集合在刻划青年人集合时，比 Cantor 集合更客观. 此例表明，Fuzzy 集合弥补了 Cantor 集合对于论域元素分类的一种缺陷，但是，还有一种元素间所可能具有的本质差异，在这两类集合中均未得到区分. 例如，在此例中，u_1 与 u_2 在 Cantor 集合中不加区分，在 Fuzzy 集合中也可以有相同的隶属度，但在时间的作用下，u_1 可以变成青年人，而 u_2 则不可能. 然而，区分 u_1 与 u_2 的这种本质差异，在对某种人才的选拔中是有实际意义的(显然这种类型的区分也有利于对产品价值的评价、企业评估指标的界定等许多实际问题). 因此，建立具有元素的是非属性的可转换性区分功能的可拓集合，是有着深厚的实际背景的.

2　关联函数与特征函数、隶属函数的比较

特征函数、隶属函数和关联函数分别以量化的形式描述 Cantor 集合、Fuzzy 集合和 Extension 集合对论域元素的分类方式.

设 U 为论域，$A \subset U$，$u \in U$，在 Cantor 集合论中，u 与 A 的关系由特征函数值 $\varphi_A(u) \in \{0,1\}$ 表达，

$$\varphi_A = \varphi_A(u) = \begin{cases} -1, u \notin A \ ; \\ 1, u \in A \ . \end{cases}$$

在 Fuzzy 集合论中，u 与 A 的关系由隶属函数值—隶属度 $\mu_{\underset{\sim}{A}} \in [0,1]$ 表达，

$$\mu_{\underset{\sim}{A}} = \mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \begin{cases} = 0, u \notin A \ ; \\ \in (0,1), u \in A, (\mu_{\underset{\sim}{A}}) \text{ 且} \\ \qquad u \notin A, (1 - \mu_A) \ ; \\ = 1, u \in A \ . \end{cases}$$

在 Extension 集合中，u 与 A 的关系由关联函数值—关联度 $k_{\tilde{A}}(u) \in (-\infty, +\infty)$ 表达，

$$k_{\tilde{A}} = k_{\tilde{A}}(u) \begin{cases} \in (-\infty, 0), u \notin A \ , \\ = 0, u \notin A \text{ 且 } u \in A \ , \\ \in (0, +\infty), u \in A \ , \end{cases}$$

这 3 种函数对论域 U 的划分依次如图 1,2,3 所示(其中 $A_+(T)$，$\dot{A}(T)$ 分别是将由变换 T 确定的潜在稳定域和潜在可拓域).

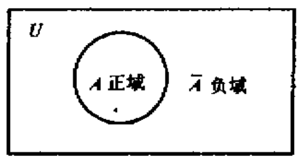

图 1　特征函数对论域的划分

Fig.1　The partition of field U by Characteristic function

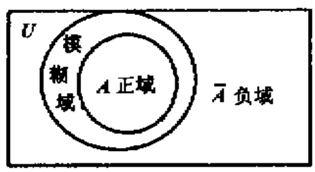

图 2　隶属函数对论域的划分

Fig.2　The partition of field U by Subordinate function

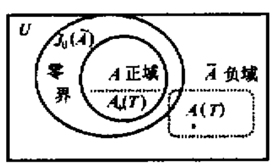

图 3　关联函数对论域的划分

Fig.3　The partition of field U by Relation function

特征函数值、隶属度对于 A，$\bar{A}$ 各自内部的元素均不加区分，但隶属度对似属于 A 又不属于 A 的临界元素进行了细分. 隶属函数的取值特征，表明，在 Fuzzy 集合基础上产生的 Fuzzy 数学，实际上是由 Cantor 集合基础上产生的经典数学扩充而来的量化事物临界状态和模糊性的数学工具.

关联度对 A，$\bar{A}$ 各自内部的元素分别进行了

细分.关联函数的这种取值特征,为描述元素在某种变换下,关于 A 的属性的可转换性和论域中的潜在稳定域、潜在可拓域的划分奠定了基础.此外,零界 $J_0(\tilde{A})$ 的引入,不仅使客观存在的既是又非元素在论域中有了立足之地,而且为寻求论域中元素关于 A 的属性的转换方式提供了途径.在一定条件下,零界元具有实现元素属性转换的功能[3].因此,可以展望,即将在 Extension 集合论基础上发展起来的可拓数学,是量化事物的可转换性、模拟和控制事物转化过程的数学工具.

3 结束语

以上探讨表明,Fuzzy 集合、Extension 集合均以 Cantor 集合为基础,又各自具有其它集合不可替代的独特之处.Extension 集合的特色在于它对元素关于给定子集的是非属性在特定变换下的可转换性以及元素在这种变换下的潜在属性的识别角度与功能.这种独特的且在一定场合下更为客观的识别角度与功能是 Extension 集合与 Cantor 集合、Fuzzy 集合并存的基础,也是将在 Extension 集合论基础上发展起来的可拓数学乃至以 Extension 集合论为理论基础之一的可拓学的生命力所在.建立在 Cantor 集合论基础上的经典数学为自动化控制技术的产生提供了工具,从而大大加快了工业化的进程,建立在 Fuzzy 集合论基础上的 Fuzzy 数学对于事物临界状态的模拟与控制功能导致了模糊控制的产生,从而大大扩展了自动化控制技术的应用领域,提高了自动化控制技术的人工智能化程度.根据 Extension 集合和可拓数学的特色可以推断,现在正在研究过程中的基于 Extension 集合论和可拓数学的可拓控制,将使得对于事物的可变性模拟与控制实现自动化,从而进一步提高自动化控制的人工智能化程度,在自动化控制技术研究与应用中开辟出一个崭新的领域.

参考文献:

[1] 蔡 文.可拓论及其应用[J].科学通报,1999,44(7):673-682.
[2] 蔡 文.物元模型及其应用[M].北京:科学技术文献出版社,1994.
[3] 左 静.转折物元辨析[J].郑州工学院学报,1996,6(2):60-62.

Research on Extension Set

ZUO Jing

(Department of Mathematics, Physics & Mechanics, Zhengzhou University of Technology, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: Extension set is one of the basic conceptions of Extenics. Researching on the essence of Extension set and relationship between it with another set is very important for clearing the existence base, study value and prospects of Extension. By comparing the taxis and distinguishing principle of Extension set with another set it is found that all sets base on Cantor set, nevertheless they have their respective peculiarity which can't be substituted each other. The peculiarity of Extension set is its identifying angle of view for the latent attribute of elements in total set and its identifying function for the elements whose attribute are convertible by a given transform.

Key words: Extension set; Cantor set; Fuzzy set; Extenics