

板条共线裂纹问题的超奇异积分方程方法

乐金朝,包旭,王复明

(郑州工业大学水利与环境工程学院,河南 郑州 450002)

摘 要:结构工程中频繁使用板条构件,对于板条构件疲劳破坏的研究大多局限于实验方法,而从断裂力学的角度进行理论分析的为数不多.针对这种情况,采用积分变换,对平面无限板条中对称共线内裂纹问题进行了研究.根据混合边界条件,在有限部积分的意义下将问题归结为以裂纹表面的位错为未知函数的超奇异积分方程,并建立了相应的数值计算方法,给出了应力强度因子的计算公式.最后通过数值算例的计算分析了裂纹之间的相互影响.

关键词:超奇异积分方程;应力强度因子;无限板条

中图分类号: TB 121 **文献标识码:** A

0 引言

由于平面无限板条模型可以近似地表示许多结构构件和试验试件,所以该问题在结构工程的理论分析和试验研究中受到广泛的关注.关于含有裂纹的无限板条结构问题,文献[1]曾采用主值型奇异积分方程方法进行了系统研究,并取得了可供工程实际应用的研究成果.超奇异积分方程方法由希腊学者 Ioakimidis 首先引入断裂力学的研究中^[2],由于该方法是用裂纹岸的位移间断作为基本未知函数,与主值型奇异积分方程方法相比,其物理意义明确,求解更为方便.近年来,这种方法在断裂力学领域已经受到了国内外许多学者的重视.文献[3]采用超奇异积分方程方法,对板条中含有单个裂纹问题进行了系统分析,建立了数值求解算法,并指出此方法在求解深裂纹问题时可以获得主值型奇异积分方程方法无法获得的高精度.

本文在参考前人研究成果的基础上,采用超奇异积分方程方法,对平面无限板条中含有两个垂直于边界的对称共线内裂纹问题进行了研究.利用混合边界条件,在有限部积分的意义下得到了问题的超奇异积分方程,并建立了相应的数值计算方法.通过对几个典型算例的计算,分析了裂纹之间的相互影响.

1 问题的力学模型

假定有一宽度为 $2h$ 的板条,建立如图 1 所示的直角坐标系.板条以 y 轴为中心线,并沿 y 轴无限延伸.在 x 轴上存在两条垂直于边界的共线裂纹,裂纹长度均为 $b - a$,并且关于 y 轴对称分布.假定在无穷远处不作用外力,并且不考虑体积力,仅在裂纹岸上作用自相平衡的法向外载 $\sigma(x)$ ($\sigma(x) = \sigma(-x)$).板条的剪切弹性模量为 μ ,泊松比为 ν .根据弹性力学理论,该问题的基本微分方程为

$$\begin{cases} (k - 1)\nabla^2 u + 2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) = 0, \\ (k - 1)\nabla^2 v + 2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

式中 u, v 分别是位移在 x 和 y 方向上的分量; k 为一个弹性常数,平面应变时, $k = 3 - 4\nu$,平面应力时, $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$.考虑到问题的对称性,此处只需研究 $1/4$ 的板条,它满足如下的混合边界条件:

$$u(0, y) = 0, \sigma_{xy}(0, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq \infty), \quad (2)$$

$$\sigma_{xx}(h, y) = 0, \sigma_{xy}(h, y) = 0 \quad (0 \leq y \leq \infty) \quad (3)$$

$$\sigma_{yy}(x, \infty) = 0, \sigma_{xy}(x, \infty) = 0 \quad (0 \leq x \leq \infty), \quad (4)$$

$$\sigma_{xy}(x, 0) = 0 \quad (0 \leq x \leq h), \quad (5)$$

收稿日期 2001 - 02 - 01;修订日期 2001 - 03 - 20

基金项目 河南省自然科学基金资助项目(994050300)

作者简介:乐金朝(1965 -)男,河南省信阳市人,郑州工业大学副教授,博士,主要从事三维断裂力学问题的解析数值计算方法方面的研究.

$$\begin{cases} \sigma_{yy}(x, 0) = -\alpha(x) (a \leq x \leq b), \\ u(x, 0) = 0 (0 \leq x \leq a, b \leq x \leq h), \end{cases} \quad (6)$$

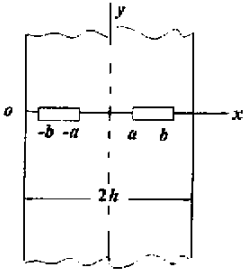


图1 无限板条共线内裂纹

Fig.1 Collinear internal cracks in a infinite strip

2 问题的超奇异积分方程

为了求解的方便,定义裂纹上、下岸的位移间断函数

$$V(x) = \frac{1}{2} [u(x, +0) - u(x, -0)] = u(x, +0) (0 < x < h). \quad (7)$$

应用混合边界条件,并经积分变换,将问题归结为以位移间断 $V(x)$ 为未知函数的超奇异积分方程

$$\int_a^b \frac{V(t)}{(t-x)^2} dt + \int_a^b K_2(x, t) V(t) dt = -\pi \frac{k+1}{4\mu} \alpha(x) (a < x < b). \quad (8)$$

式中,积分核 $K_2(x, t)$ 为不含奇异性的正常项,其具体形式为

$$K_2(x, t) = \frac{1}{(t+x)^2} + k(x, t) + k(x, -t), \quad (9)$$

式中, $k(x, t) = \int_0^\infty K(x, t, \xi) e^{-(h+t)\xi} d\xi$,
 $K(x, t, \xi) = \xi e^{-\xi h} \{ \cosh(x\xi) [(-2\xi h e^{-2\xi h} - 3\xi h + \xi h e^{-4\xi h} + 5 + 3e^{-4\xi h} + 8e^{-2\xi h}) + \xi(h+t) \cdot (-e^{-4\xi h} + 2\xi h + 2\xi h e^{-2\xi h} - 3 - 4e^{-2\xi h})] / 0.5(1 + e^{-2\xi h}) + \sinh(\xi x) [6\xi x + 2\xi x e^{-2\xi h} - 4x\xi(h+t)] \} / (1 + 4\xi h e^{-2\xi h} - e^{-4\xi h})$.

求解超奇异积分方程式(8),便可确定待求的未知函数 $V(x)$.由此可以确定问题的位移分量和应力分量.在断裂力学中,我们感兴趣的是应力强度因子.因为裂纹前沿附近的应力场是决定裂纹扩展与否以及扩展速度的关键性因素,而应力强度因子是描述裂纹前沿奇性应力场的特征量.按定义,其计算式为

万方数据

$$K(a) = \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{2(a-x)} \sigma_{yy}(x, 0), (x < a),$$

$$K(b) = \lim_{x \rightarrow b} \sqrt{2(x-b)} \sigma_{yy}(x, 0), (x > b).$$

3 数值计算

关于一维超奇异积分方程的数值分析理论, Kutt^[4]和 Erdogan^[5]等人都曾作过较为系统的分析.本文参考文献[5]中的数值分析理论,为方程(8)建立如下的数值计算方法.此处只计算内裂纹.为了数值计算方便,应首先对方程进行标准化处理,为此引入以下无量纲变量 r, s :

$$\begin{cases} t = \frac{b-a}{2} r + \frac{b+a}{2}, \\ x = \frac{b-a}{2} s + \frac{b+a}{2}, \end{cases} \quad (10)$$

并令

$$\begin{cases} V(t) = \frac{b-a}{2} f(r), \\ K_2(s, r) = \left(\frac{b-a}{2} \right)^2 K_2(x, t), \end{cases} \quad (11)$$

$$g(s) = -\pi \frac{(1+k)}{4\mu} \alpha(x).$$

则方程式(8)可化为以下标准形式:

$$\int_{-1}^1 \frac{f(r)}{(r-s)^2} dr + \int_{-1}^1 K_2(s, r) f(r) dr = g(s), \quad (-1 < s < 1), \quad (12)$$

根据断裂力学的解析理论^[6],并考虑到未知函数 $f(r)$ 在裂纹端点处有界,该未知函数可表示为以下形式

$$f(r) = F(r) \sqrt{1-r^2}, \quad (13)$$

其中, $F(r)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上是有界连续函数,可将其近似表示为以下的 Chebyshev 截断级数

$$F(r) = \sum_{n=0}^N a_n U_n(r), \quad (14)$$

式中, $U_n(r)$ 为第二类 Chebyshev 多项式; a_n 为待定系数,将式(13)和(14)代入式(12),可以得到以下代数方程组

$$\sum_{n=0}^N a_n [-\pi(n+1)U_n(s_j) + h_n(s_j)] = g(s_j), \quad (j = 0, 1, \dots, N) \quad (15)$$

其中,

$$h_n(s) = \int_{-1}^1 U_n(r) K_2(s, r) \sqrt{1-r^2} dr,$$

式中, s_j 为第一类 Chebyshev 多项式的零点,

$$s_j = \cos\left(\frac{2j+1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

代数方程组(15)共有 $N+1$ 个方程,而未知

数也有 $N + 1$ 个,因而方程组封闭可解.解以上代数方程组(15),可求出各待定系数 a_n ($n = 0, 1, \dots, N$),将它们顺次回代入式(14)(13)和式(11),即得原来的位移间断 $V(x)$,于是积分方程式(8)的求解完成.

根据超奇异积分方程的主部分分析结果,裂纹端点处的应力强度因子可按如下公式进行计算:

$$\begin{cases} K(a) = \frac{4\mu}{k+1}\sqrt{\frac{b-a}{2}}F(-1), \\ K(b) = \frac{4\mu}{k+1}\sqrt{\frac{b-a}{2}}F(1). \end{cases} \quad (16)$$

4 数值算例

为了验证本文方法,这里对裂纹表面作用一些典型载荷的情况作了具体分析计算.其中部分

结果与文献上已有的结果比较符合较好.从而证明本文的计算是成功的.

例1 受法向均布载荷的裂纹.在图1所示的裂纹上、下岸作用大小相等方向相反的均布张拉载荷 σ_0 ,裂纹尺寸和应力强度因子都经过了无量纲化.本文对未知函数进行逼近时使用了 $N + 1$ 项.为了考核该方法的收敛速度及数值结果的稳定性,对于不同的裂纹位置取了4个 $N + 1$ 值,计算结果如表1所示.从中可以看出,对于普通裂纹和深裂纹,该方法的收敛速度快,数值结果稳定.

表2中, $N + 1$ 的取为9,将本文的计算结果与文献[1]中的结果作了比较,两者符合较好(其中带“*”号的是文献[1]中的结果),从中可以看出本文的计算是成功的.

表 1 数值方法的收敛性

Table 1 The convergence of the numerical method

a/h	b/h	$N + 1$	$\frac{k(a)}{\sigma_0 \sqrt{a_0}}$	$\frac{k(b)}{\sigma_0 \sqrt{a_0}}$	a/h	b/h	$N + 1$	$\frac{k(a)}{\sigma_0 \sqrt{a_0}}$	$\frac{k(b)}{\sigma_0 \sqrt{a_0}}$
0.2	0.6	4	1.1086	1.1093	0.1	0.9	4	1.8104	1.9782
-	-	9	1.1086	1.1093	-	-	9	1.8050	1.9765
-	-	12	1.1086	1.1093	-	-	12	1.8050	1.9765
-	-	20	1.1086	1.1093	-	-	20	1.8050	1.9765

表 2 法向均布载荷作用下的无量纲应力强度因子

Table 2 Stress – intensity factors for collinear internal cracks in a strip under uniform loading

a/h	b/h	$\frac{k(a)}{\sigma_0 \sqrt{a_0}}$	$\frac{k(a)^*}{\sigma_0 \sqrt{a_0}}$	$\frac{k(b)}{\sigma_0 \sqrt{a_0}}$	$\frac{k(b)^*}{\sigma_0 \sqrt{a_0}}$
0.05	0.45	1.2981	-	1.1459	-
0.1	0.5	1.1756	1.1709	1.1145	1.1157
0.2	0.6	1.1086	1.1078	1.0934	1.0940
0.3	0.7	1.0922	-	1.0942	-
0.4	0.8	1.0984	1.0963	1.1144	1.1218
0.45	0.85	1.1025	-	1.1395	-
0.5	0.9	1.1185	1.1251	1.1928	1.2099

说明 $a_0 = (b - a)/2$.

例2 受法向线性载荷的裂纹.如果在图1所示的裂纹上、下岸作用线性分布载荷 $\sigma(x) = \sigma_0 \frac{x-a}{b-a}$,在端点 a 载荷集度为0,端点 b 载荷集度为 σ_0 ,则计算结果如表3所示.此处的 $N + 1$ 均为9.

从以上两个算例可以看出,在裂纹尺寸不变的情况下,随着裂纹间距逐渐减小,应力强度因子逐渐增大,随着裂纹越来越靠近边界,应力强度因子也呈增大趋势.由此可以看出,不仅边界对应力

强度因子有影响,两条裂纹之间也存在相互影响.

表 3 法向线性载荷作用下的无量纲应力强度因子

Table 3 Stress – intensity factors for collinear internal cracks in a strip under linear loading

a/h	b/h	$\frac{k(a)}{\sigma_0 \sqrt{a_0}}$	$\frac{k(b)}{\sigma_0 \sqrt{a_0}}$
0.05	0.45	0.3820	0.8189
0.1	0.5	0.3313	0.8052
0.2	0.6	0.3026	0.7964
0.3	0.7	0.2957	0.7979
0.4	0.8	0.2976	0.8099
0.45	0.85	0.3021	0.8245
0.5	0.9	0.3111	0.8566

说明 $a_0 = (b - a)/2$.

参考文献:

[1] GUPTA G D, ERDOGAN F. The problem of edge cracks in an infinite strip[J]. J Applied Mech Trans ASME, 1979 41 :1001 – 1006.

[2] IOAKIMIDIS N I. Application of finite – part integrals to the singular integral equations of crack problems in plane and three – dimensional elasticity[J]. Acta Mech, 1982, 45 31 – 47.

[3] LU Ming - che , ERDOGAN F. Stress intensity factors in two bonded elastic layers containing cracks perpendicular to and on the interface ,Part I : Analysis[J]. Engng Fracture Mech ,1983 ,18 :491 - 506.

[4] KUTT H R. The numerical evaluation of principal value integrals by finite - part integration[J]. Numer Math ,1975 ,14 :205 - 210.

[5] KAYA A C , ERDOGAN F . On the solution of integral equations with strongly singular kernels[J]. Quart Appl Math ,1987 ,14 :105 - 122.

[6] 汤任基. 裂纹柱的扭转理论[M]. 上海 :上海交通大学出版社 ,1996.

Method of Strongly Singular Integral Equation for Collinear Internal Cracks in a Strip

YUE Jin - chao , BAO Xu , WANG Fu - ming

(College of Hydraulic & Environmental Engineering Zhengzhou University of Technology Zhengzhou 450002 ,China)

Abstract :By using integral transform and the concept of finite part integrals , we reduce the collinear internal cracks problem in a infinite strip into an integral equation with strong singularity. The numerical technique for solving the strongly singular integral equation is described. The stress intensity factor is caculated at the end of the paper.

Key words :strongly singular integral ; stress intensity factor ; infinite strip

(上接 6 页)

Review of Methods of Preparation of 1,4 - naphthoquinone by Air - catalytic Oxidation

LIU Guo - ji , CHEN Jin - zhong , LUO Ting - liang , NIU Bai - lin , YANG Jie

(College of Chemical Engineering Zhengzhou University of Technology Zhengzhou 450002 ,China)

Abstract :This paper mainly introduces the case of foreign preparation of 1,4 - naphthoquinone(including the method of liquid - phase oxidation and the method of air - catalytic oxidation). The advance of research of vapor phase catalytic oxidation of naphthalene to 1,4 - naphthquinone is chiefly recommended. It also compares different methods. The method of air - catalytic oxidation has many characteristics , such as less pollution , lower production cost , the method is suitable for mass - production. The necessity and significance of study the synthetic preparation of 1,4 - naphthoquinone by air - catalytic oxidation in our county are discussed. At the same time , the research provides a valuable reference to the development of catalysis science and technology.

Key words :air - catalytic oxidation ; naphthoquinone ; naphthalene