

机器人动力学模型的程序实现

陈 丰¹,张振西²,苏 红¹,尹洪玲³

(1. 郑州工业大学数理力学系 ,河南 郑州 450002 ;2. 河南职业技术学院 ,河南 郑州 450053 ;3. 郑州星海实业公司 ,河南 郑州 450053)

摘 要 :对刚性、串联、开环的机器人进行了动力学分析 ,建立了一般机器人的拉格朗日动力学模型 ,推导了拉格朗日方程两边的计算过程 ,编制了自动建立多自由度机器人动力学模型的计算机程序 ,并与实际相结合 ,分析了所研制的六自由度手控器的运动学动力学问题 ,为手控器的研制提供了理论依据 .

关键词 :机器人 ;手控器 ;动力学模型 ;程序

中图分类号 :O 313.3 文献标识码 :A

对于一般的机器人系统 ,动能表达式及其微分项相当复杂 ,目前 ,国外用拉格朗日方程求解动力学模型的研究重点集中在对公式的简化及发展适用于实际计算的算法上 .我们在双臂六自由度机器人的研制过程中 ,从机构坐标系的建立及坐标变换的方法入手 ,对拉格朗日动力学方程进行简化和归纳 ,导出适于计算机计算和求解的机构动力学模型算法 ,并详细分析和计算了六自由度机械臂 ,为机器人的结构设计提供了具体的理论依据 .

1 机器人的拉格朗日动力学模型

1.1 拉格朗日方程

假设 n 个自由度的机器人是由 n 个刚体杆件组成 ,若将各构件的重力也作为广义力的一部分 ,则系统的拉格朗日函数就是系统的动能 $L = K$,拉格朗日方程为^[1]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial k}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial k}{\partial q_i} = Q_i , \tag{1}$$

引入广义质量矩阵 M ,上式亦可表示为

$$M\ddot{q} + \dot{M}\dot{q} - \frac{1}{2}\dot{q}^T \frac{\partial M}{\partial \dot{q}}\dot{q} = Q , \tag{2}$$

设各关节执行器的驱动力 P 已包含在广义力 Q 之中 ,并设 Y 为广义力中的非驱动力 ,再令

$$U = \dot{M}\dot{q} - \frac{1}{2}\dot{q}^T \frac{\partial M}{\partial \dot{q}}\dot{q} - Y , \tag{3}$$

则得广为流行的机器人力学方程的一般形式^[2]

$$M\ddot{q} = P - U , \tag{4}$$

其逆动力学解为

$$P = M\ddot{q} + U . \tag{5}$$

1.2 坐标变换矩阵

用 T_{ij} 表示由第 j 个构件坐标系到第 i 个构件坐标系的变换矩阵 :

$$T_{ij} = \prod_{k=1}^j T_{k-1,k} \quad (j > i \text{ 时}) ; \tag{6}$$

用 T_i 表示由第 i 个构件坐标系到固定坐标系的变换矩阵 :

$$T_i = \prod_{k=1}^i T_{k-1,k} = T_{i-1} T_{i-1,i} , \tag{7}$$

其中 : $T_{i-1,i}$ 为相邻两构件坐标系之间的变换 .用 r_{ai} 表示由第 i 构件质心指向第 i 关节的向量 ;用 W_i 表示第 i 关节轴线的单位向量 ,根据 W_i 的取向 , $T_{i-1,i}$ 分别为^[2]

$$T_{i-1,i} = \begin{cases} T^{iqi} & (t_i = 1) ; \\ T^{jqj} & (t_i = 2) ; \\ T^{kqi} & (t_i = 3) , \end{cases} \tag{8}$$

其中 :

$$T^{iqi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c q_i & -s q_i \\ 0 & s q_i & c q_i \end{bmatrix} ; T^{jqj} = \begin{bmatrix} c q_i & 0 & s q_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -s q_i & 0 & c q_i \end{bmatrix} ;$$
$$T^{kqi} = \begin{bmatrix} c q_i & -s q_i & 0 \\ s q_i & c q_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ,$$

式中, $c q_i$ 表示 $\cos q_i$; $s q_i$ 表示 $\sin q_i$.

在求出 T_i 后, 可得到

$$r_{a_i} = T_i r_{a_i}, r_{e_i} = T_i r_{e_i}, W_i = T_i W_i.$$

1.3 角速度与 A 矩阵

第 i 构件的角速度可表示为第 i 构件之前各

构件相对角速度(即广义速度)之向量和, 如图 1 所示.

$$\omega_i = \sum_{j=1}^i S_j \dot{q}_j W_j. \quad (9)$$

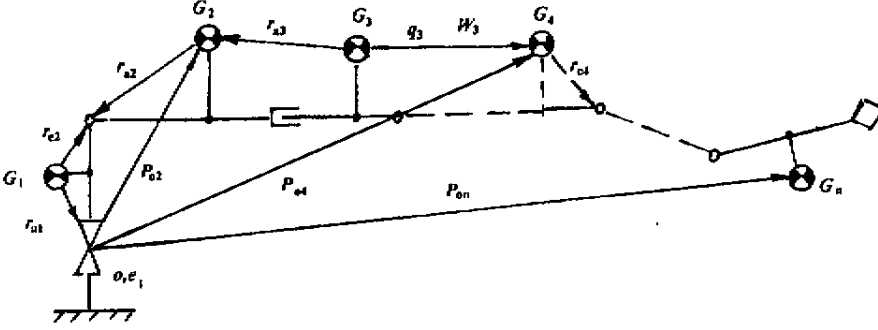


图 1 构件质心位置向量

Fig.1 The position vector of center of assembly quality

标识符 S_i 区别转动关节和移动关节. 引入 $3 \times n$ 矩阵

$$A_i = [a_1, a_2, \dots, a_i, 0]$$

矩阵元素定义为

$$a_i = S_i W_i = S_i T_i W_i, \quad (10)$$

则可得矩阵质心的角速度表达式

$$\omega_i = A_i \dot{q}. \quad (11)$$

1.4 质心速度与 B 矩阵

用 P_{oi} 表示第 i 构件质心位置向量, 则

$$P_{oi} = - \sum_{j=1}^i r_{aj} + \sum_{j=1}^{i-1} r_{e,j+1} + \sum_{j=1}^i (1 - s_j) q_j \omega_j. \quad (12)$$

运用矩阵微分法则进行微分, 整理后可得

$$V_{ic} = \sum_{p=1}^i \left[- \sum_{k=p}^i (a_p \times r_{ak}) + \sum_{k=p}^{i-1} (a_p \times r_{e,k+1}) + (1 - s_p) W_p + \sum_{k=p}^{i-1} (1 - s_{k+1}) q_{k+1} (a_p \times W_{k+1}) \right] \dot{q}_p, \quad (13)$$

引入 $3 \times n$ 矩阵

$$B_i = [b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in}, 0], \quad (14)$$

其元素为

$$b_{ij} = \begin{cases} a_j \times R_{ji} + (1 - s_j) W_j & (j \leq i); \\ 0 & (j > i); \end{cases} \quad (15)$$

而

$$R_{ji} = - \sum_{k=j}^i r_{ak} + \sum_{k=j}^{i-1} [r_{e,k+1} + (1 - s_{k+1}) q_{k+1} W_{k+1}],$$

式中: R_{ji} 为第 j 关节为转动关节时由第 j 关节到第 i 构件质心的向量. 这样, 可得到矩阵形式的质

1.5 惯量张量的变换与 C 矩阵

在动能表达式中, 包含有 $\frac{1}{2} \omega_i^T J_i \omega_i$ 项, 其中 J_i 是对固定坐标系的转动惯量, 而作为机构参数给出的是对构件坐标系的转动惯量 \tilde{J}_i , 两者关系可表示为^[3]

$$J_i = T_i \tilde{J}_i T_i^{-1} = T_i \tilde{J}_i T_i^T, \quad (17)$$

这样, 可得到

$$0.5 \tilde{\omega}_i^T J_i \tilde{\omega}_i = 0.5 \tilde{\omega}_i^T T_i \tilde{J}_i T_i^T \tilde{\omega}_i = 0.5 (T_i^T \tilde{\omega})^T \tilde{J}_i (T_i^T \tilde{\omega}),$$

引入 $3 \times n$ 矩阵

$$C = [C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{in}, 0], \quad (18)$$

其元素表达式为

$$C_{ij} = T_i^T a_j = S_j T_{ij} W_j, \quad (19)$$

因此, 转动动能部分可写为

$$0.5 \tilde{\omega}_i^T J_i \tilde{\omega}_i = 0.5 \dot{q}^T C_i^T \tilde{J}_i C_i \dot{q}. \quad (20)$$

2 程序递推公式

2.1 递推公式

为了方便计算, 把 B_i , C_i , $\frac{\partial B_i}{\partial q_i}$ 及 $\frac{\partial C_i}{\partial q_i}$ 的公式写成递推形式, 令

$$H_i = -r_{ai} + r_{ei} + (1 - s_i) q_i W_i, \quad (21)$$

这样, 可把 R_{ji} 写成以下形式:

$$R_{ji} = \begin{cases} R_{j,i-1} + H_i & (j < i); \\ -r_{ai} & (j = i); \end{cases} \quad (22)$$

B_i 的元素可写成以下形式:

$$b_{ij} = \begin{cases} b_{i-1,j} + a_j \times H_i & (j < i) , \\ -a_j \times r_{aj} + (1 - s_j)W_j & (j = i) , \\ 0 & (j > i) , \end{cases} \quad (23)$$

$\frac{\partial B_i}{\partial q_s}$ 的元素可写成以下形式：

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_s} = \begin{cases} (\frac{\partial b_{i-1,j}}{\partial q_s}) + (\frac{\partial a_j}{\partial q_s}) \times H_i + a_j \times (\frac{\partial H_i}{\partial q_s}) & (j < i, s \leq i) , \\ -(\frac{\partial a_j}{\partial q_s}) \times r_{aj} - a_j \times (\frac{\partial r_{aj}}{\partial q_s}) + (1 - s_j) \times (\frac{\partial W_i}{\partial q_s}) & (j = i, s \leq i) , \\ 0 & (\text{其余}) , \end{cases} \quad (24)$$

C_i 的元素可写成以下形式：

$$C_{ij} = \begin{cases} E_{i-1,i}^T C_{i-1,j}^T & (j < i) , \\ S_i \tilde{W}_i & (j = i) , \\ 0 & (j > i) , \end{cases} \quad (25)$$

$\frac{\partial C_i}{\partial q_s}$ 的元素可写成：

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial q_s} = \begin{cases} E_{i-1,i}^T (\frac{\partial C_{i-1,j}}{\partial q_s}) & (j < s < i) , \\ (\frac{\partial E_{i-1,i}^T}{\partial q_s}) C_{i-1,i} & (j < s = i) , \\ 0 & (\text{其余}) . \end{cases} \quad (26)$$

2.2 程序计算框图

程序计算框图见图 2^[4].

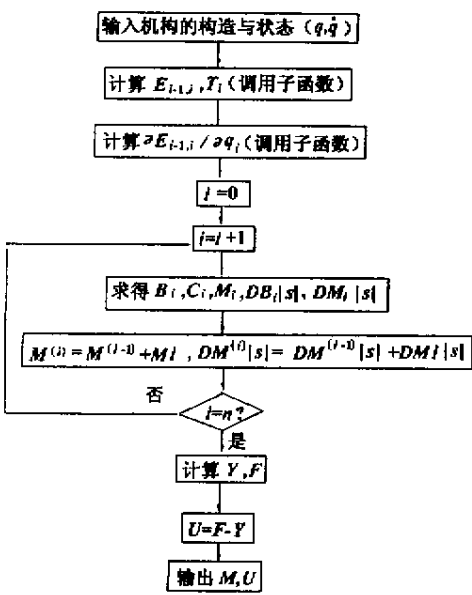


图 2 拉格朗日动力学模型 $P = M\ddot{q} + U$ 计算框图

Fig.2 The calculator of the Lagrangian dynamical modeling

求 F 的计算框图及计算 $dE[i]$ 的计算框图
万方数据

略.

3 程序示例

本文重点计算双臂协调六自由度手控器的动力学模型,因其双臂完全对称,所以只需计算单臂即可知道整个机械臂的情况.机械臂机构参数见表 1,程序所需输入数据见表 2.

表 1 机械臂机构参数

Table 1 Data of the manipulator structure

序号	m/kg	J_{xx}/kgm^2	J_{yy}/kgm^2	J_{zz}/kgm^2
1	10	0.02	0.01	0.02
2	5	0.05	0.07	0.01
3	5.4	0.4	0.4	0.011
4	1	0.002	0.003	0.001
5	0.6	0.0006	0.0006	0.0002
6	0.6	0.004	0.003	0.0025

表 2 程序所需输入数据

Table 2 Data in program

i	S_i	t_i	\tilde{r}_{ai}	\tilde{r}_{ei}
1	1	1	(0.0.1.0.15)	(0.0.0.13)
2	1	3	(0.0.0.1)	0
3	0	2	(0.12.0.1.0)	(0.0.01.0.3)
4	1	2	0	0
5	1	1	0	0
6	1	3	0	0

有了上述参数,再根据各关节的运动规律得到不同时刻的 q_i 与 \dot{q}_i ,则就可通过程序运行得到 U 及 M ,这样就确定了机械臂的动力学模型

$$P = M\ddot{q} + U .$$

由此,我们只要知道 \ddot{q}_i ,就可求得各关节的驱动力矩 P_i ,下面是在 $q[i] = \{0.1.57.1.3.14.1.57.0\}$, $\dot{q}[i] = \{1.0.2.1.3.2.5.3.2\}$ 的状态下求得的 M 及 U :

$$M = \begin{bmatrix} 0.001934 & -0.000673 & -5.392\text{E}-05 \\ -0.000673 & 0.0012119 & 0.008586 \\ -5.392\text{E}-05 & 0.008586 & 2.006324 \\ -0.026896 & 0.016748 & 0.055081 \\ 0.026924 & 0.016723 & 0.055502 \\ -0.026929 & 0.016719 & 0.055503 \\ -0.026896 & -0.026924 & -0.0026929 \\ 0.016748 & 0.016723 & 0.016719 \\ 0.055081 & 0.055502 & 0.055503 \\ 1.462071 & 1.462071 & 1.462071 \\ 1.462071 & 1.462085 & 1.462085 \\ 1.462071 & 1.462085 & 1.462086 \end{bmatrix} ;$$

$$U = [-9.652191 , 4.51025 , 5.049047 , 3.26421 , 3.65932 , 3.41725] ,$$

此时,根据运动规律得知 $\ddot{q} = \{0.0.001.0.0012 ,$

$0.001, 1, 0.00031 \}$,
则可求得
 $P = [-9.637353, 4.43791, 5.043129, 3.607803, 3.37001, 3.79361]$.

4 结论

由上面的示例可知,在已知各关节运动规律
的条件下,我们可以求得各关节的驱动力矩大小,
若依次求出在各个时间状态下的驱动力矩,则可
给出各个关节的驱动力矩随时间变化的状态图,
从图上可以观察各个关节的最大驱动力矩和最小
驱动力矩,这对机器人的实时控制和仿真优化是
不可缺少的一部分,这属于动力学的逆问题——
已知关节变量求驱动力矩.

另外,由于 $P = M\ddot{q} + U$ 也可变换成 $\ddot{q} = M^{-1} \cdot (P - U)$,故若已知驱动力矩 P ,则可求得关节变

量 \ddot{q} ,这属于动力学正问题——已知驱动力矩求
关节变量.

因此,根据相应的不同条件,可用此程序求解
动力学正逆问题,这对机械臂或手控器的动力学
分析无疑是具有极大的应用价值.

参考文献:

[1] 周远清.智能机器人系统[M].北京:清华大学出版
社,1989.
[2] 武科布拉托维奇.操作机器人的动力学理论与应用
[M].周起键,译.北京:科学出版社,1988.
[3] 王 伟,陈 丰.通过惯性参数设计线性化和优化
机器人的动力学分析[J].郑州工业大学学报,1997,
18(增刊):184 - 186.
[4] 易忠亮.C + + 矩阵运算类库与 Windows 应用软件
[M].北京:清华大学出版社,1995.

Programming for Dynamical Models of Robot

CHEN Feng¹, ZHANG Zhen - xi², SU Hong¹, YIN Hong - ling³

(1. Department of Mathematics, Physics & Mechanics Zhengzhou University of Technology Zhengzhou 450002, China ; 2. Henan Teachers College of Technology Zhengzhou 450053, China ; 3. Zhengzhou Xinghai Industry Corporation Zhengzhou 450053, China)

Abstract :In this article, the dynamics of open - chain rigid robotic manipulators is discussed. The Lagrangian dynamical modeling of general robot is developed. The calculating process of Lagrangian equation is derived and the program of deriving the dynamical modeling of multi - robot automatically is developed. The article puts the developed model into practice and discusses the kinematic and dynamic of 6 DOF master arm that has a real value in practice.

Key words :robot ; master arm ; dynamics model ; programme