

文章编号 :1007 - 649X(2001)01 - 0001 - 05

四边支承矩形板自由振动的精确解法

许琪楼¹,王仁义¹,常少英²

(1. 郑州工业大学土木建筑工程学院,河南 郑州 450002; 2. 北京国电华北电力工程有限公司,北京 100011)

摘 要: 提出矩形薄板振动主振方向的概念,在主振方向上矩形板振动波形是唯一的,由此建立了四边支承矩形板统一的振形函数表达式,并推导出板自由振动的频率方程及相应的振形曲线,除一对边简支、一对边固定矩形板和三边简支、一边固定矩形板仅发生一对边简支方向为主振方向的振动外,其余板均存在二个主振方向的振动。

关键词: 弹性薄板; 自由振动; 精确解
中图分类号: TB 125 文献标识码: A

1 主振方向及相应的振形函数表达式

板横向自由振动的微分方程为

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} - \gamma^4 W = 0, \quad (1)$$

其中,

$$\gamma^4 = \omega^2 \frac{\bar{m}}{D}, \quad (2)$$

式中: W 为自平衡位置算起的振形函数; ω 为板自由振动的圆频率; \bar{m} 为板单位面积的质量; D 为板的弯曲刚度。

板的振动是垂直板面方向的双向横向振动,根据振形正交性的思想,矩形板的振动存在以 x 方向为主振方向或以 y 方向为主振方向的两种排序法。当按 x 方向为主振方向排序时, x 方向的振动波形是唯一的,但为了保证振形曲线满足全部边界条件,在 y 方向要伴随产生与该主振形对应的耦连振动。该耦连振动所包含的 y 方向的振动波形形状、数量及各波形在振形曲线中的影响度不是唯一的,导致 x 方向某一主振波形对应有无穷个振动频率及相应的振形曲线。同理,当按 y 方向为主振方向排序时,情况类同。

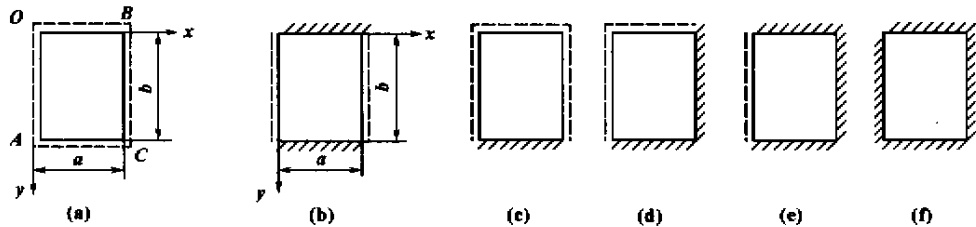


图 1 四边支承的矩形板

Fig.1 Plate with four edges supported

对图 1 所示四边支承(简支或固定)的 6 种矩形板,当采用以 x 方向为主振方向排序时,对应 x 方向第 m 个主振波形(即 $\sin \frac{m\pi x}{a}$),对应有一系

列 γ 值,均满足 $m < \frac{\gamma a}{\pi}$ 的条件,则满足振动微分方程的振形函数表达式为

$$W = (A_m \sinh \alpha_1 y + B_m \cosh \alpha_1 y + C_m \sin \alpha_2 y +$$

收稿日期 2000 - 10 - 18; 修订日期 2001 - 01 - 07

基金项目 河南省教委自然科学基金资助项目(2000430009)

作者简介 许琪楼(1944 -)男,山西省长治县人,郑州工业大学教授,硕士,主要从事钢结构、工程抗震及工程弹性力学方面的研究。

$$D_m \cos \alpha_2 y) \sin \alpha x + \sum_{n < \frac{\gamma b}{\pi}} (E_n \operatorname{sh} \beta_1 x + F_n \operatorname{ch} \beta_1 x + G_n \sin \beta_2 x + H_n \cos \beta_2 x) \sin \beta y + \sum_{n > \frac{\gamma b}{\pi}} (E_n \operatorname{sh} \beta_1 x + F_n \operatorname{ch} \beta_1 x + G_n \operatorname{sh} \beta_3 x + H_n \operatorname{ch} \beta_3 x) \sin \beta y, \quad (3)$$

式中: $\alpha = \frac{m\pi}{a}$, $\alpha_1 = \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2}$, $\alpha_2 = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$, $\beta = \frac{n\pi}{b}$, $\beta_1 = \sqrt{\gamma^2 + \beta^2}$, $\beta_2 = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}$, $\beta_3 = \sqrt{\beta^2 - \gamma^2}$.

三角函数 $\sin \frac{m\pi x}{a}$ 所属部分代表 x 方向第 m 个主振形的振动波形, m 的取值是已知的、唯一的. 为了保证该主振形具有非零解, 待定系数 A_m, B_m, C_m, D_m 不能全为零. 级数 $\sum_{n=1,2,3} \sin \beta y$ 所属部分为伴随 x 方向第 m 个主振形而耦连发生的 y 方向的振动, 当 $n < \frac{\gamma b}{\pi}$ 和 $n > \frac{\gamma b}{\pi}$ 时, 为满足振动微分方程应有不同的振动曲线, 在一般情况下 $\frac{\gamma b}{\pi}$ 不为整数, 通常可不考虑 $n = \frac{\gamma b}{\pi}$ 的情况.

式(3)中包含有 8 个待定系数, 由板的 8 个边界条件及级数的正交性可以建立以 $A_m, B_m, C_m, D_m, E_n, F_n, G_n, H_n$ 为未知量的 8 个线性方程, 通过代数变换可得仅包含 A_m, B_m, C_m, D_m 为未知量的 4 个齐次线性方程. 由 A_m, B_m, C_m, D_m 不能全为零的条件建立频率方程, 由此解出 x 方向第 m 个主振形对应的各阶自振频率及相应的振形曲线, 分别取 $m = 1, 2, 3, \dots$, 即得以 x 方向为主振方向排序的所有振形.

当采用以 y 方向为主振方向排序时, 对应 y 方向第 n 个主振形, 振形函数表达式为

$$W = (E_n \operatorname{sh} \beta_1 x + F_n \operatorname{ch} \beta_1 x + G_n \sin \beta_2 x + H_n \cos \beta_2 x) \sin \beta y + \sum_{m < \frac{\gamma a}{\pi}} (A_m \operatorname{sh} \alpha_1 y + B_m \operatorname{ch} \alpha_1 y + C_m \sin \alpha_2 y + D_m \cos \alpha_2 y) \sin \alpha x + \sum_{m > \frac{\gamma a}{\pi}} (A_m \operatorname{sh} \alpha_1 y + B_m \operatorname{ch} \alpha_1 y + C_m \operatorname{sh} \alpha_3 y + D_m \operatorname{ch} \alpha_3 y) \sin \alpha x. \quad (4)$$

式中: $\alpha_3 = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$. 为保证主振形具有非零解, E_n, F_n, G_n, H_n 不能全为零.

大多数矩形板的振动可以任选某一主振方向进行分析, 其结果是相同的, 但有些矩形板仅发生某一特定主振形的振动.

2 x 方向为主振方向的振动

2.1 一对边简支的矩形板

图 1(a)(b)(c) 所示 $x = 0$ 和 $x = a$ 均为简支边的矩形板, 引入边界条件后得 $E_n = F_n = G_n = H_n = 0$, 式(3)蜕化为

$$W = (A_m \operatorname{sh} \alpha_1 y + B_m \operatorname{ch} \alpha_1 y + C_m \sin \alpha_2 y + D_m \cos \alpha_2 y) \sin \alpha x. \quad (5)$$

由 $y = 0$ 和 $y = b$ 时的边界条件及 A_m, B_m, C_m, D_m 不应全为零的条件, 可得到与经典理论解相同的频率方程.

2.2 二邻边简支二邻边固定的矩形板

图 1(d) 所示矩形板 x 方向第 m 个主振形对应的频率方程为

$$\begin{aligned} & \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_1 b \cos \alpha_2 b - \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_1 b \sin \alpha_2 b - \frac{16\alpha^2 \gamma^4 \operatorname{sh} \alpha_1 b \sin \alpha_2 b}{ab} \cdot \\ & \left[\sum_{n < \frac{\gamma b}{\pi}} \frac{\beta^2 \operatorname{sh} \beta_1 a}{(\beta^2 + \alpha_1^2)(\beta^2 - \alpha_2^2)(\alpha^2 + \beta_1^2)(\alpha^2 - \beta_2^2)} \cdot \frac{\sin \beta_2 a}{(\beta_2 \operatorname{sh} \beta_1 a \cos \beta_2 a - \beta_1 \operatorname{ch} \beta_1 a \sin \beta_2 a)} + \right. \\ & \left. \sum_{n > \frac{\gamma b}{\pi}} \frac{\beta^2 \operatorname{sh} \beta_1 a}{(\beta^2 + \alpha_1^2)(\beta^2 - \alpha_2^2)(\alpha^2 + \beta_1^2)(\alpha^2 - \beta_3^2)} \cdot \frac{\operatorname{sh} \beta_3 a}{(\beta_3 \operatorname{ch} \beta_3 a \operatorname{sh} \beta_1 a - \beta_1 \operatorname{ch} \beta_1 a \operatorname{sh} \beta_3 a)} \right] = 0, \quad (6) \end{aligned}$$

然后, 令 $C_m = 1$, 并求出其它待定系数, 代入式(3)即得相应的振形曲线.

2.3 一边简支三边固定矩形板

图 1(e) 所示矩形板 x 方向第 m 个主振形对应的频率方程为

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\operatorname{sh} \alpha_1 b} \{ \alpha_1 \alpha_2 (\operatorname{ch} \alpha_1 b \cos \alpha_2 b - 1) - \alpha^2 \operatorname{sh} \alpha_1 b \sin \alpha_2 b \} \\ & + (\alpha_1 \sin \alpha_2 b - \alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_1 b) \cdot \sum_{n=1,2,3} (S_n \cos n\pi) + \\ & (\alpha_2 \operatorname{sh} \alpha_1 b \cos \alpha_2 b - \alpha_1 \operatorname{ch} \alpha_1 b \sin \alpha_2 b) \cdot \sum_{n=1,2,3,\dots} S_n \} \\ & + \sin \alpha_2 b \{ \sum_{n=1,2,3} (S_n \cos n\pi) \}^2 - (\sum_{n=1,2,3} S_n)^2 = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1,2,3} S_n = \frac{16\alpha^2 \gamma^4}{ab} \cdot \\ & \left[\sum_{n < \frac{\gamma b}{\pi}} \frac{\beta^2 \operatorname{sh} \beta_1 a}{(\alpha^2 + \beta_1^2)(\alpha^2 - \beta_2^2)(\beta^2 + \alpha_1^2)(\beta^2 - \alpha_2^2)} \cdot \frac{\sin \beta_2 a}{(\beta_2 \operatorname{sh} \beta_1 a \cos \beta_2 a - \beta_1 \operatorname{ch} \beta_1 a \sin \beta_2 a)} + \right. \\ & \left. \sum_{n > \frac{\gamma b}{\pi}} \frac{\beta^2 \operatorname{sh} \beta_1 a}{(\alpha^2 + \beta_1^2)(\alpha^2 - \beta_3^2)(\beta^2 + \alpha_1^2)(\beta^2 - \alpha_2^2)} \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\text{sh}\beta_3 a}{(\beta_3 \text{sh}\beta_1 a \text{ch}\beta_3 a - \beta_1 \text{ch}\beta_1 a \text{sh}\beta_3 a)} \right] \cdot$$

$$\sum_{n=1,2,3} (S_n \cos n\pi)$$
为 $\sum_{n=1,2,3} S_n$ 中各项乘以 $\cos n\pi$ 后取和。

令 $D_m = 1$ (或 $C_m = 1$) 并求出其它待定系数 , 即可得到相应的振形曲线。

2.4 四边固定的矩形板

图 1(f) 所示的矩形板 x 方向第 m 个主振形对应的频率方程同式 (7) , 但其中

$$\sum_{n=1,2,3} S_n = \frac{16\alpha^2 \gamma^4}{ab} \cdot \left\{ \sum_{n < \frac{\gamma b}{\pi}} [\beta \chi(\beta_1 \sin \beta_2 a \cdot (\cos m\pi - \text{ch}\beta_1 a) - \beta_2 \text{sh}\beta_1 a (\cos m\pi - \cos \beta_2 a))] \right\}$$

表 1 自振频率及振形节线图 (x 方向)

Table 1 Free vibration frequency and vibration mode wave node line diagram (x direction)

边界条件	m 值	自振频率 $\left(\frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{D}{m}}\right)$					振形节线图				
		ω_{m1}	ω_{m2}	ω_{m3}	ω_{m4}	ω_{m5}	W_{m1}	W_{m2}	W_{m3}	W_{m4}	W_{m5}
图 1d	1	26.95 (27.15)	60.67 (61.06)	114.52 (115.18)	188.84	281.93					
	2	60.55 (60.83)	92.41 (93.88)	145.74	219.02	312.29					
	3	114.49 (115.06)	145.64	197.02	270.31	363.03					
	4	189.02	218.96	270.29	340.32	434.32					
	5	282.09	312.30	363.11	434.55	522.10					
图 1e	1	31.55 (31.96)	70.54 (71.42)	129.07 (130.87)	209.71	308.18					
	2	62.97 (63.71)	100.04 (102.06)	158.46	237.05	334.65					
	3	115.97 (116.98)	150.96	208.08	285.92	384.23					
	4	190.52	223.00	278.12	355.45	452.83					
	5	283.00	315.29	369.93	445.22	542.45					
图 1f	1	35.84 (36.15)	73.12 (73.83)	132.01 (132.80)	210.19	308.81					
	2	72.24 (73.83)	107.81 (109.69)	164.35	242.68	339.92					
	3	131.75 (132.27)	164.13	219.11	295.08	393.07					
	4	210.36	242.22	297.80	369.64	465.20					
	5	308.86	340.06	392.58	467.68	559.08					

表 1 列出图 1(d)(e)(f)所示的方板($a = b$)25 个自振频率及振形节线图 ,并用 Sup 93 有限元法计算了方板的前 6 个频率(表中括号数字所示) ,二者结果是十分相近的.对图 1(d)(f)所示的方板有 $\omega_{ij} = \omega_{ji}$,这表明本文所提的主振方向的排序法及相应的振形函数表达式符合板振动的实际规律性.

3 y 方向为主振方向的振动

3.1 四边简支矩形板

图 1(a)所示四边简支的矩形板 ,利用式(4)及 $y = 0$ 和 $y = b$ 时的边界条件得 $A_m = B_m = C_m = D_m = 0$,由 $x = 0$ 和 $x = a$ 时的边界条件及 E_n, F_n, G_n, H_n 不应全为零的条件可得 y 方向第 n 个主振形对应的频率方程.它与 x 方向为主振方向的计算结果是一致的 ,仅排序方向不同.

3.2 一对边简支一对边固定的矩形板及三边简支一边固定的矩形板

对图 1(b)(c)所示二种矩形板 ,由式(4)及 $x = 0$ 和 $x = a$ 时的边界条件以及 E_n, F_n, G_n, H_n 不应全为零的条件 ,可得 $\sin\beta_2 a = 0$ 的频率方程 ,但这个方程是假解 ,因为代入 $y = 0$ 和 $y = b$ 时的边界条件后 ,相应的振形曲线恒为零值.这表明这两种矩形板不会发生 y 方向为主振方向的振动.

3.3 二邻边简支二邻边固定的矩形板 ,四边固定的矩形板

图 1(d)(f)所示的二种矩形板 ,边界条件对

称于对角线 OC ,因此以 y 方向为主振方向的频率方程及振形曲线与以 x 方向为主振方向的情况相似 ,利用前述公式并将两个方向对应的参数互换即可.

3.4 一边简支三边固定的矩形板

图 1(e)所示矩形板的频率方程为

$$\beta_2 \text{sh}\beta_1 a \cos\beta_2 a - \beta_1 \text{ch}\beta_1 a \sin\beta_2 a + \frac{16\beta^2 \gamma^4 \text{sh}\beta_1 a \sin\beta_2 a}{ab} .$$

$$\{ \sum_{m < \frac{2a}{\pi}} [\alpha^2 (\alpha_1 \text{ch}\alpha_1 b \sin\alpha_2 b - \alpha_2 \text{sh}\alpha_1 b \cos\alpha_2 b + (\alpha_2 \text{sh}\alpha_1 b - \alpha_1 \sin\alpha_2 b) \cos n \pi)] \sqrt{ [(\alpha^2 + \beta_1^2) (\alpha^2 - \beta_2^2) (\beta^2 + \alpha_1^2) (\beta^2 - \alpha_2^2) \cdot (\alpha^2 \text{sh}\alpha_1 b \sin\alpha_2 b + \alpha_1 \alpha (1 - \text{ch}\alpha_1 b \cos\alpha_2 b))] + \sum_{m > \frac{2a}{\pi}} [\alpha^2 (\alpha_1 \text{ch}\alpha_1 b \text{sh}\alpha_3 b - \alpha_3 \text{sh}\alpha_1 b \text{ch}\alpha_3 b + (\alpha_3 \text{sh}\alpha_1 b - \alpha_1 \text{sh}\alpha_3 b) \cos n \pi)] \sqrt{ [(\alpha^2 + \beta_1^2) (\alpha^2 - \beta_2^2) (\beta^2 + \alpha_1^2) (\beta^2 + \alpha_3^2) \cdot (\alpha_1 \alpha (1 - \text{ch}\alpha_1 b \text{ch}\alpha_3 b) + \alpha^2 \text{sh}\alpha_1 b \text{sh}\alpha_3 b)] } } = 0 . \tag{8}$$

令 $G_n = 1$,求出其余待定系数并代入式(4) ,即得相应的振形曲线.表 2 列出 $a = b$ 方板自振频率及相应的振形节线图 ,与表 1 结果相比(括号内所示) ,其自振频率十分相近 ,振形节线图也十分相似 ,仅排序方法不同.

表 2 自振频率及振形节线图(y 方向)

Table 2 Free vibration frequency and vibration mode wave node line diagram(y direction)

n 值	自振频率 $(\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{D}{m}})$					振形节线图				
	ω_{n1}	ω_{n2}	ω_{n3}	ω_{n4}	ω_{n5}	W_{n1}	W_{n2}	W_{n3}	W_{n4}	W_{n5}
1	31.78 (31.55)	63.21 (62.97)	116.16 (115.97)	189.51 (190.52)	283.12 (283.00)					
2	71.02 (70.54)	100.62 (100.04)	151.60 (150.96)	223.48 (223.00)	316.07 (315.29)					
3	130.28 (129.07)	159.22 (158.46)	208.95 (208.08)	279.59 (278.12)	370.97 (369.93)					
4	209.40 (209.71)	238.12 (237.05)	286.84 (285.92)	356.70 (355.45)	446.82 (445.22)					
5	308.05 (308.18)	336.76 (334.65)	385.54 (384.23)	453.53 (452.83)	544.13 (542.45)					

4 结论

本文所提主振方向的概念符合板自由振动的规律性 ,除一对边简支一对边固定的矩形板及三边简支一边固定的矩形板仅存在一对边简支方向为主振方向的振动外 ,其它四边支承的矩形板均有二个主振方向 ,可任选一主振方向进行分析.

不同主振方向具有不同的振形函数表达式 ,在主振方向上振动波形是唯一的 ,其相应的待定系数不应全为零 ,振形函数的形状必须符合板边界条件所能激发的振动形态 ,所采用的三角级数在相应区间上应具有正交性.

一对边简支一对边固定的矩形板(图 1(b)) ,

三边简支一边固定的矩形板(图 1(c))仅发生一对边简支方向为主振方向的振动 ,这是由于式(5)所表示的 x 方向为主振方向的主振波形可以同时满足 4 个边界上所有的边界条件 ,与 y 方向振动不发生耦合 ,反之 y 方向的主振波形自身无法满足边界条件也无法利用 x 方向的耦合振动使之满足边界条件 ,因而该振动不会发生.

参考文献 :

[1] 徐芝纶 . 弹性力学[M]. 北京 : 高等教育出版社 , 1982 .
[2] 梁远森 , 许琪楼 . 矩形薄板动力分析的集中质量法 [J]. 郑州工业大学学报 , 1999 20(2) : 73 - 76 .

Accurate Free Vibration Solution of the Rectangular Plates with Four Edges Supported

XU Qi - lou¹ , WANG Ren - yi¹ , CHANG Shao - ying²

(1. College of Civil & Building Engineering , Zhengzhou University of Technology , Zhengzhou 450002 , China ; 2. National North China Electric Power Engineering Co. Ltd. , Beijing 100011 , China)

Abstract : The idea of the main vibration direction of the rectangular plate is put forward in this paper . The vibration wave number of the plate is unique in the main vibration direction . The uniform expressions of vibration mode curve of the rectangular plates with four edges supported are established by the method and the free vibration frequency equations and corresponding vibration mode curves of this plates are deduced . The plate with two opposite edges simple supported and two opposite edges clamped and the plate with three edges simple supported and one edge clamped have one main vibration direction that is the direction of the two opposite edges simple supported , and other plates have two main vibration directions .

Key words : elastic plate ; free vibration ; accurate solution