文章编号:1007-6492(2000)04-0001-03

谈一对边简支一对边自由矩形板自振频率解法

许琪楼[1],张 锋[2],姬鸿恩[1]

(1.郑州工业大学土木建筑工程学院,河南 郑州 450002;2.洛阳—三门峡高速公路建设前线指挥部,河南 郑州 450052)

摘 要:一对边简支一对边自由矩形板自振频率传统求解方法认为该板对应的最低自振频率 ω_{m1} 等于同跨度简支梁的自振频率 ω_m.在比较该矩形板与同跨度简支梁的刚度的基础上,得出矩形板最低自振频率 ω_{m1} 应略小于同跨度简支梁的自振频率 ω_m,由此提出求解该矩形板 ω_{m1} 的正确的振形函数表达式及频率方程,并计算了该板25个自振频率及相应的振形曲线,前5个频率及振形与有限元结果十分相近.

关键词:矩形板;自由振动;解法

中图分类号:TB 125 文献标识码:A

1 经典的振形函数表达式及错误认识

板横向自由振动的微分方程为[1]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\gamma^4 w=0\,, \tag{1}$$

式中:

$$\gamma^4=\omega^2\frac{\overline{m}}{D}\;; \tag{2}$$

w 为自平衡位置算起的振形函数;ω 为自由振动的圆频率;$\overline{m}$ 为板单位面积的质量;D 为板的弯曲刚度.

对应图1所示一对边简支,一对边自由的矩形板,经典的振型函数表达式为

$$w=(A_m\mathrm{sh}\alpha_1 y+B_m\mathrm{ch}\alpha_1 y+C_m\sin\alpha_2 y+D_m\cos\alpha_2 y)\sin\alpha x\,, \tag{3}$$

式中:$\alpha=\dfrac{m\pi}{a}$,$\alpha_1=\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}$,$\alpha_2=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$.

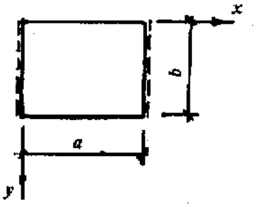

图1 一对边简支,一对边自由的矩形板

式(3)自然满足振动微分方程及 $x=0$ 和 $x=a$ 时的边界条件;由 $y=0$ 和 $y=b$ 时的边界条件,可得以 A_m,B_m,C_m,D_m 为未知量的4个齐次线性方程;由 A_m,B_m,C_m,D_m 不全为零的条件可得频率方程为

$$2\alpha_1\alpha_2[\gamma^4-(\mu-1)^2\alpha^4]^2(\mathrm{ch}\alpha_1 b\cos\alpha_2 b-1)+\{\alpha_2^2[\gamma^2+(1-\mu)\alpha^2]^4-\alpha_1^2[\gamma^2+(\mu-1)\alpha^2]^4\}\mathrm{sh}\alpha_1 b\sin\alpha_2 b=0\,, \tag{4}$$

对应某一确定的 m 值,由式(4)可求出一系列的 γ 值,再由式(2)求出相应的自振频率 ω_{m1},ω_{m2},ω_{m3},…,然后由4个齐次线性方程求出待定系数为

$$\left\{\begin{aligned}
&D_m=1\,,\\
&C_m=\{\alpha_1[\gamma^2+(\mu-1)\alpha^2]^2\mathrm{sh}\alpha_1 b+\alpha_2[\gamma^2+(1-\mu)\alpha^2]^2\sin\alpha_2 b\}/\{\alpha_2[\gamma^2+(1-\mu)\alpha^2]^2(\mathrm{ch}\alpha_1 b-\cos\alpha_2 b)\}\,,\\
&B_m=\frac{\gamma^2+(\mu-1)\alpha^2}{\gamma_2+(1-\mu)\alpha^2}\,,\\
&A_m=\frac{\alpha_2[\gamma^2+(1-\mu)\alpha^2]}{\alpha_1[\gamma^2+(\mu-1)\alpha^2]}C_m.
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

需要说明的是:式(4)无法计算出某一 m 值对应的最低自振频率 ω_{m1},这是因为式(3)所示的振形函数表达式必须满足 $m<\dfrac{\gamma a}{\pi}$ 的条件,即相应

收稿日期:2000-04-05;修订日期:2000-05-20
作者简介:许琪楼(1944-),男,山西省长治县人,郑州工业大学教授,硕士,主要从事钢结构、工程抗震及工程弹性力学方面的研究.

的 $\omega > \frac{m^2\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\bar{m}}}$，因此传统的看法认为：板最低的自然频率等于相应简支梁的自然频率，即

$$\omega_{m1} = \frac{m^2\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\bar{m}}} , \tag{6}$$

这个结论是错误的，现说明如下：

如果式(6)成立，由式(2)得相应的 $\gamma = \frac{m\pi}{a} = \alpha$，当 $m = \frac{\gamma a}{\pi}$时，满足式(1)所示的振动微分方程的振形函数表达式应为

$$w = (A_m y + B_m + C_m \mathrm{sh}\alpha_1 y + D_m \mathrm{ch}\alpha_1 y)\sin\alpha x , \tag{7}$$

式(7)自然满足 $x = 0$ 和 $x = a$ 时的边界条件，由 $y = 0$ 和 $y = b$ 时的边界条件及 A_m, B_m, C_m, D_m 不全为零的条件得频率方程为

$$2\alpha_1[\gamma^4 - (1-\mu)^2\alpha^4](\mathrm{ch}\alpha_1 b - 1) - \frac{\mu\alpha_1^2 b[\gamma^2 + (\mu-1)\alpha^2]^2 \mathrm{sh}\alpha_1 b}{2-\mu} = 0 , \tag{8}$$

但取 $\gamma = \alpha$ 时，其值又不为零，式(6)、式(8)是相互矛盾的，说明式(6)是不成立的.

2　ω_{m1}的正确求解方法

一对边简支，一对边自由的矩形板，某一 m 值对应的最低自振频率 ω_{m1}小于相应简支梁的自然频率$\frac{m^2\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{D}{m}}$，这个结论可以由梁和板的相对刚度给予解释. 一个简支梁承受均布荷载时，跨中挠度系数为$\frac{5}{384} = 0.01302$，但同样跨度的方板承受均布荷载时，板中点挠度系数为 0.01309，自由边中点挠度系数为 0.01501，均大于 0.01302. 说明板的弯曲刚度略小于梁，因此板的自然频率也应略小于梁，由式(2)得 $m > \frac{\gamma a}{\pi}$，这时满足振动微分方程的振形函数表达式应为

$$w = (A_m \mathrm{sh}\alpha_1 y + B_m \mathrm{ch}\alpha_1 y + C_m \mathrm{sh}\alpha_3 y + D_m \mathrm{ch}\alpha_3 y)\sin\alpha x , \tag{9}$$

式中：$\alpha_3 = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$，式(9)自然满足 $x = 0$ 和 $x = a$ 时的边界条件，由 $y = 0$ 和 $y = b$ 时的边界条件及 A_m, B_m, C_m, D_m 不全为零的条件，得频率方程

$$2\alpha_1\alpha_3[\gamma^4 - (\mu-1)^2\alpha^4]^2(\mathrm{ch}\alpha_3 b\,\mathrm{ch}\alpha_1 b - 1) + \{\alpha_1^2[\gamma^2 + (\mu-1)\alpha^2]^4 + \alpha_3^2[\gamma^2 + (1-\mu)\alpha^2]^4\}\mathrm{sh}\alpha_1 b\,\mathrm{sh}\alpha_3 b = 0 , \tag{10}$$

待定系数值为

$$\left\{\begin{aligned} D_m &= 1 , \\ C_m &= \{\alpha_3[\gamma^2 + (1-\mu)\alpha^2]^2 \mathrm{sh}\alpha_3 b + \alpha_1[\gamma^2 + (\mu-1)\alpha^2]^2 \mathrm{sh}\alpha_1 b\} / \{\alpha_3[\gamma^2 + (1-\mu)\alpha^2]^2(\mathrm{ch}\alpha_1 b - \mathrm{ch}\alpha_3 b)\} , \\ B_m &= \frac{\gamma^2 + (\mu-1)\alpha^2}{\gamma_2 + (1-\mu)\alpha^2} , \\ A_m &= \frac{\alpha_3[\gamma^2 + (1-\mu)\alpha^2]}{\alpha_1[\gamma^2 + (\mu-1)\alpha^2]} C_m , \end{aligned}\right. \tag{11}$$

将式(11)代入式(9)后，得相应的振形曲线.

表 1 列出图 1 所示的方板($a = b$，$\mu = 0.3$)各阶自振频率[2]，图 2 列出相应的振形节线图，并用 Sup 93 有限元程序计算了方板的前 5 个频率(表中括号内所示)，二者是十分相近的，从而说明本文方法的正确性.

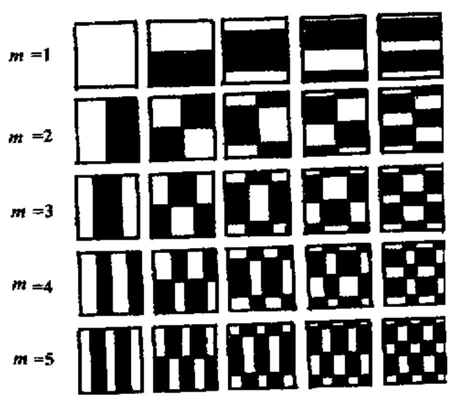

图 2　m = 1 ~ 5 时对应的振形节线图

表 1　各阶自振频率计算结果

m 值	自振频率$\left(\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{D}{\bar{m}}}\right)$				
	ω_{m1}	ω_{m2}	ω_{m3}	ω_{m4}	ω_{m5}
1	9.63(9.62)	16.13(16.03)	36.73(35.99)	75.28	133.70
2	38.94(38.94)	46.74(46.44)	70.74	111.03	169.28
3	87.99	96.04	122.04	164.70	224.76
4	156.75	164.79	191.87	236.26	298.10
5	245.24	253.15	280.88	326.43	389.73

参考文献：

[1] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京：高等教育出版社，1982.

[2] 梁远森. 弹性矩形薄板动力特征分析的集中质量法[D]. 郑州 郑州工业大学土木建筑工程学院，1999.

Discussion about the Solution of the Free Vibration Frequency of Rectangular Plate with Two Opposite Ends Simply Supported and Two Opposite Ends Free

XU Qi－lou[1]，ZHANG Feng[2]，JI Hong－en[1]

（1. College of Civil & Building Engineering，Zhengzhou University of Technology，Zhengzhou 450002，China；2. The Forward Command Post of Luoyang—Sanmenxia Expressway，Zhengzhou 450002，China）

Abstract：The classical solution considers that the minimum free vibration frequency （ω_{m1}） of the rectangular plate with two opposite ends simply supported and two opposite ends free is equal to the free vibration frequency （ω_m） of freely－supported beam with the same span. In this paper，the conclusion is proved to be wrong and the contrast of rigidity between the plate and the beam proves that ω_{m1} is little than ω_m. Therefore，the correct vibration mode function and frequency equation，which used for finding out ω_{m1}，are advanced. Twenty－five free vibration frequencies and corresponding vibration mode curves are worked out in this paper. Five lowest frequencies and there corresponding modes of vibration are quite similar to the calculations with finite element method.

Key words：rectangular plate；free vibration；solution method