文章编号:1007-6492(2000)03-0052-02

单向随机模型误差方差带约束的一种齐性检测

张新育[1],孙甫照[2],陈建梅[1]

(1.郑州工业大学数理力学系,河南 郑州 450002;2.驻马店师范专科学校物理系,河南 驻马店 463000)

摘 要:利用多元正态总体的复相关系数检验,给出了单向分类随机效应模型 $y_{ij}=\mu_j+\alpha_i+\varepsilon_{ij}$ 具有线性约束 $I'\Lambda H=0$ 的误差方差的一种齐性检测方法.即检验 $H_0:\sigma_1^2=\cdots\sigma_n^2$,其中,$\Lambda=\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_n^2)$,$R(H_{m\times t})=t$,$\mu$ 为常量,$\alpha_i\sim N(0,\sigma_0^2)$,$\varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma_j^2)$,$i=1,2,\cdots,n$;$j=1,2,\cdots,m$ 为随机效应.各 α_i,ε_j 独立,$I'=(1,1,\cdots\cdots,1)$,检验统计量为 $F=\frac{R^2}{1-R^2}\cdot\frac{n-m+t}{m-t-1}\sim F(m-t-1,n-m+t)$,拒绝域为 $W\{F>F_\alpha(m-t-1,n-m+t)\}$.

关键词:复相关系数;随机效应;方差齐性检测;线性约束

中图分类号:O 212 **文献标识码**:A

1 问题描述与引理证明

单向分类随机效应方差分析模型是指 $y_{ij}=\mu_j+\alpha_i+\varepsilon_{ij}$ 或 $y_{ij}=\vec{\chi}_j'\vec{\beta}+\alpha_i+\varepsilon_{ij}$[1],其中 μ_j 或 $\vec{\chi}_j'\vec{\beta}$ 为固定效应,$\alpha_i\sim N(0,\sigma_0^2)$ 为随机效应,$\varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma_j^2)$,$i=1,2,\cdots,n$;$j=1,2,\cdots,m$ 为随机误差,各 α_i,ε_{ij} 独立,随机向量为

$$\vec{Y}_i=\begin{bmatrix}y_{i1}\\y_{i2}\\y_{im}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu_1+\alpha_i+\varepsilon_{i1}\\\mu_2+\alpha_i+\varepsilon_{i2}\\ \\\mu_m+\alpha_i+\varepsilon_{im}\end{bmatrix},$$

$$i=1,2,\cdots,n.\ \mathrm{iid.}\sim N(U,\textstyle\sum_0),$$

其中,$U=[\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m]'$,$\sum_0=\sigma_0^2II'+\Lambda$,$\Lambda=\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_m^2)$.本文将要解决的问题是在线性约束 $I'\Lambda \overset{m\times t}{H}=0_{1\times t}$ 之下,检验误差方差的齐性,即 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2=\cdots=\sigma_m^2$,其中 $R(H)=t$,H 列满秩.

引理 1 对 H 的列向量组正交标准化得矩阵 $Q_{m\times t}$,则 $I'\Lambda H=0_{1\times t}\Leftrightarrow I'\Lambda Q=0_{1\times t}$.

证明:因为 $Q=HC$,C 可逆,故 $I'\Lambda H=0_{1\times t}\Leftrightarrow I'\Lambda QC^{-1}=0_{1\times t}\Leftrightarrow I'\Lambda Q=0_{1\times t}$.

引理 2 在约束 $I'\Lambda Q=0$ 之下,若 $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2=\cdots=\sigma_m^2$ 成立,则 $I'Q=0_{1\times t}$ 成立.即 $I'Q=0_{1\times t}$ 是 H_0 成立的必要条件.

证明:$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2=\cdots=\sigma_m^2>0$ 成立,即 $\Lambda=\sigma_1^2E$,代入 $I'\Lambda Q=0$,得 $I'Q=0_{1\times t}$.

2 主要定理及证明

H_0 检验统计量的推导是基于如下结论.

定理 1:设 $\vec{P}_1=I_m(1/\sqrt{m})$,$Q=[\vec{P}_2,\vec{P}_3,\cdots,\vec{P}_{t+1}]$,$I'Q=0$,$P_*=[\vec{P}_{t+1},\cdots,\vec{P}_m]$,$P=[\vec{P}_1,Q,P_*]_{m\times m}$.其中,$\vec{P}_2,\vec{P}_3,\cdots,\vec{P}_{t+1}$ 为一标准正交组,$\vec{P}_{t+2},\cdots,\vec{P}_m$ 是$(\vec{P}_1,\vec{P}_2,\cdots,\vec{P}_{t+1})$的标准正交补.

(1) P 是正交阵;

(2) 分割 $\sum=P'\sum_0P=$

$$\begin{bmatrix}\sum_{11}&\sum_{12}&\sum_{13}\\\sum_{21}&\sum_{22}&\sum_{23}\\\sum_{31}&\sum_{32}&\sum_{33}\end{bmatrix}\begin{matrix}1\\t\\m-t-1\end{matrix},$$

则在已知 $I'\Lambda Q=0_{1\times t}$,$I'Q=0$ 时,H_0 成立$\Leftrightarrow R^2=\sum_{13}\sum_{33}^{-1}\sum_{31}/\sum_{11}=0$.

证明:(1) $\vec{P}_1,\vec{P}_2,\cdots,\vec{P}_{t+1},\cdots,\vec{P}_m$ 为 P_m 的一个标准正交基,故 P 为一正交矩阵.

(2) $\sum=P'\sum_0P=P'(\sigma_0^2II'+\Lambda)P=$

$$\sigma_0^2P'II'P+P'\Lambda P=$$

收稿日期:2000-04-01;修订日期:2000-06-02

基金项目:河南省自然科学基金资助项目(994053200)

作者简介:张新育(1963-),男,河南省西平县人,郑州工业大学讲师,主要从事数理统计方面的研究.

$$\sigma_0^2\begin{bmatrix} m & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}P'_1\\ \cdots \\ Q' \\ \cdots \\ P'_*\end{bmatrix}\boldsymbol{\Lambda}[\vec{P}_1 \quad QP_*]=$$

$$\begin{bmatrix}\vec{P}'_1\boldsymbol{\Lambda}\vec{P}'_1+m\sigma_0^2 & \vec{P}'_1\boldsymbol{\Lambda}Q & \vec{P}'_1\boldsymbol{\Lambda}P_* \\ Q'\boldsymbol{\Lambda}\vec{P}_1 & Q'\boldsymbol{\Lambda}Q & Q'\boldsymbol{\Lambda}P_* \\ P_*'\boldsymbol{\Lambda}\vec{P}_1 & P_*'\boldsymbol{\Lambda}Q & P_*'\boldsymbol{\Lambda}P_*\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} & \Sigma_{23}\\ \Sigma_{31} & \Sigma_{32} & \Sigma_{33}\end{bmatrix}.$$

$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2=\cdots=\sigma_m^2$ 成立 $\Leftrightarrow[\sigma_1^2,\cdots,\sigma_m^2]=\boldsymbol{R}[1,1,\cdots,1]\Leftrightarrow\begin{bmatrix}Q'\\ \cdots\\ P_*'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1^2\\ \sigma_2^2\\ \sigma_m^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\ \cdots\\0\end{bmatrix}$(因 $L(\vec{P}_1)=(Q \quad P_*))$. $\Leftrightarrow[\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_m^2][Q \quad P_*]=0_{1\times(m-1)}\Leftrightarrow\vec{P}'_1\boldsymbol{\Lambda}(Q \quad P_*)=0_{1\times(m-1)}\Leftrightarrow\vec{P}'_1\boldsymbol{\Lambda}Q=1\times t,\vec{P}'_1\boldsymbol{\Lambda}P_*=0_{1\times(m-t-1)}$.

所以,在 $I'\boldsymbol{\Lambda}Q=0$,即 $\vec{P}'_1\boldsymbol{\Lambda}Q=0$ 之下,$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2=\cdots=\sigma_m^2,\Leftrightarrow\vec{P}'\boldsymbol{\Lambda}P_*=0\Leftrightarrow\Sigma_{13}=0$,又 $\Sigma_{11}=\vec{P}'_1\boldsymbol{\Lambda}\vec{P}_1+m\sigma_+^2>0,\Sigma_{33}=P'_*\boldsymbol{\Lambda}P_*$ 正定,故 $\Sigma_{13}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{R}^2=\Sigma_{13}\Sigma_{33}^{-1}\Sigma_{31}/\Sigma_{11}=0$,定理得证.

3　检测统计量的推导与 H_0 拒绝域的导出

由定理知,取 $\vec{Z}_1=G\vec{Y},i=,1,2,\cdots;n$,iid. $\sim N(GU,G'\Sigma_0G)$,$G=[\vec{P}_1,P_*]'$,$G'\Sigma_0G=\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{13}\\ \Sigma_{31} & \Sigma_{33}\end{bmatrix}\frac{1}{m-t-1}$,$S_y=\sum_{i=1}^{n}(\vec{y}_i-\bar{y})(\vec{y}_i-\bar{y})'$,

$S_Z=G'S_yG=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{13}\\ S_{31} & S_{33}\end{bmatrix}\frac{1}{m-t-1}$,$\hat{\boldsymbol{R}}^2=S_{13}S_{33}^{-1}S_{31}/S_{11}$,在 $I'\boldsymbol{\Lambda}H=0_{1\times t}$ 即 $I'\boldsymbol{\Lambda}Q=0_{1\times t}$ 的约束下,$H_0:\sigma_1^2=\cdots\sigma_m^2$ 成立时,有 $F=\frac{\boldsymbol{R}^2}{1-\boldsymbol{R}^2}\cdot\frac{n-m+t}{m-t-1}\sim F(m-t-1,n-m+t)$[2],由此得到 H_0 的 $1-\alpha$ 拒绝式为:

$F>F_\alpha(m-t-1,n-m+t)$(上侧分位数).

参考文献:

[1]　王松桂.线性模型的理论及应用[M].合肥:安徽教育出版社,1987.414.

[2]　张尧庭,方开泰.多元统计分析引论[M].北京:科学出版社,1983.488.

A Method for Uniformity Test of Error Variance in Variance Analysis Model of Random Effect

ZHANG Xin-yu[1], SUN Pu-zhao[2], CHEN Jian-mei[1]

(1. Department of Mathematics, Physics & Mechanics, Zhengzhou University of Technology, Zhengzhou 450002, China; 2. Department of Physics, Zhumadian Teachers College, Zhumadian 463000, China)

Abstract: Using the multiple correlation coefficient of multivariable normal sample, this paper gives a test method $y_{ij}=\mu_j+\alpha_i+\varepsilon_{ij}$ for error variance vniformity among repeated tests in variance analysis model of random effect $I'\boldsymbol{\Lambda}H=0$. in this papcr $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_n^2)$, $\boldsymbol{R}(H_{m\times t})=t$, $\alpha_i\sim N(0,\sigma_0^2)$, $\varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma_j^2)$, $\cdots,n,j=1,2,\cdots,m$. is random effect. At this, $I'=(1,1,\cdots\cdots,1)$. Region of rejection of $H_0:\sigma_1^2=\cdots=\sigma_n^2$ is $W=\{F>F\alpha(m-t-1,n-m+t)\}$, $F=\frac{\boldsymbol{R}^2}{1-\boldsymbol{R}^2}\cdot\frac{n-m+t}{m-t-1}\sim F(m-t-1,n-m+t)$.

Key words: multiple correlation coefficient; model of random effect; uniformity test of error variance; binding linear