文章编号:1007－6492(2000)03－0048－04

解析函数非齐次 Riemann 边值问题的复变边界元方法

王祖朝[1],王新艳[2]

(1.中国地质大学信息工程学院,北京 100083;2.郑州工业高等专科学校,河南 郑州 450007)

摘　要:提出应用复变边界元方法寻找解析函数非齐次 Riemann 边值问题的近似解,给出了误差估计和误差分析,并得出了如下结论:当节点增加时,误差函数的界不会增大.

关键词:解析函数;边界元;黎曼边值问题

中图分类号:O 175.8　　文献标识码:A

1　解析函数非齐次 Riemann 边值问题

设 D^+ 表示复平面上有界的 $N+1$ 连通区域,其边界 Γ 是由光滑的 Jordan 闭曲线 $\Gamma_0,\Gamma_1,\cdots,\Gamma_N$ 所围成,$\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_N$ 在 Γ_0 的内部.以 D_0 表示以 Γ_0 为边界的无界区域,D_j 表示以 Γ_j 为边界的有界区域($j=1,\cdots,N$).令

$$D^- = D_0 + D_1 + \cdots + D_N,$$

不妨设 $z=0\in D^+$.那么解析函数的非齐次 Riemann 边值问题(以下简称问题 R)的提法如下:求在 D^+,D^- 内的分区解析函数 $F(z)$(要求 $F(\infty)$ 有界),在 Γ 上分侧连续,且满足边界条件

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) + g(t) \quad (t\in\Gamma), \tag{1}$$

其中:$G(t),g(t)\in C_\mu(\Gamma)$ $(0<\mu<1)$是 Γ 上的两个已知函数,且 $G(t),g(t)\neq 0$.

问题 R 的解依赖于如下定义的所谓标数:

$$k = \frac{1}{2\pi}\Delta_\Gamma \arg G(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N}\Delta_{\Gamma_j}\arg G(t) = \sum_{j=0}^{N} k_j,$$

当 $k\geq 0$ 时,满足边界条件式(1)的解 $F(z)$ 具有以下形式:

$$F(z) = F_0(z) + \Psi(z), \tag{2}$$

式中:$\Psi(z)=X(z)P_k(z)$是对应的齐次 Riemann 边值问题的通解,$X(z)$是齐次 Riemann 边值问题的标准解,且

$$X(z)=\begin{cases} e^{w(z)}/\prod(z), & z\in D^+ \\ z^{-k}e^{w(z)}, & z\in D^- \end{cases},$$

$$w(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\ln[t^{-k}\prod(t)G(t)]}{t-z}dt,$$

其中:$\prod(z)=(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\cdots(z-z_N)^{k_N}$;$P_k(z)$是次数不超过 k 的多项式;$F_0(z)$是问题 R 的特解,具有形式

$$F_0(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(t)}{X^+(t)(t-z)}dt, \tag{3}$$

而 $X^+(t)=\lim\limits_{z\to t}X(z)$,$(t\in\Gamma, z\in D^+)$.当 $k<0$ 时,问题 R 在点 $z=\infty$ 处有有界解的可解条件为

$$\int_\Gamma \frac{g(t)}{X^+(t)}t^n dt \quad (n=0,1,\cdots,-k-2),$$

当这些条件满足时,其解 $F(z)$ 形如式(3)[2].如果记

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(t)}{X^+(t)(t-z)}dt, \tag{4}$$

那么

$$F_0(z) = X(z)f(z). \tag{5}$$

本文的目的是求 $F_0(z)$ 的近似解 $\hat{F}_0(z)$.在文献[4]中,已经利用复变边界元方法得到了 $X(z)$ 的近似解 $\hat{X}(z)$,并作出了误差估计.因此,下面的主要任务是求 $f(z)$ 的近似解 $\hat{f}(z)$,即近似地计算式(4)中的积分.为简单计,以下不妨设 D^+ 是有界的单连通域,$z=0\in D^+$,Γ 是闭折线.

2　复变边界元方法

在边界 Γ 上选取 m 个节点 $z_1,z_2,\cdots,z_m$,且折线 Γ 的每个顶点都取作节点,这些节点将 Γ 分成 m 段 Γ_j,$\Gamma=\bigcup\limits_{j=1}^{m}\Gamma_j$,$\Gamma_j=\{z\mid z=(1-s)z_j+sz_{j+1}, 0\leq s\leq 1\}$,称 Γ_j 为一个 2—节点边界元,并

收稿日期:2000－04－02;修订日期:2000－06－12

作者简介:王祖朝(1964－),男,湖北省随州市人,中国地质大学副教授,主要从事复方程和计算机应用技术方面的研究.

记

$$\delta=\max_{1\le j\le m}|\Gamma_j|.$$

由于 $g(t)$ 虽然已知,但 $X^+(t)=e^{w^+(t)}$ 中的 $w^+(t)$ 仍然是一个不能直接计算的边界积分,因此节点值 $g(z_j)/X^+(z_j)$ 是一个需要计算的量;$X^+(z_j)$ 也不能用 $\hat{X}^+(z_j)$ 来代替,因为在边界 Γ 上,$\lim\limits_{\delta\to0}\hat{X}^+(t)=X^+(t)$ 一般不成立. 为此我们采用如下办法,即第一步先求出一个在节点 $z_j(j=1,2\cdots,m)$ 处 $X^+(t)$ 的近似值 $\tilde{X}^+(z_j)$,使其满足 $\lim\limits_{\delta\to0}\tilde{X}^+(z_j)=X^+(z_j)$;第二步以近似值 $g(z_j)/\tilde{X}^+(z_j)$ 代替 $g(z_j)/X^+(z_j)$ 作为节点值,然后应用复变边界元方法. 让我们先来看看 $w^+(z_j)$. 由 Plemelj 公式

$$w^+(z_j)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\ln[t^{-k}G(t)]}{t-z_j}\mathrm{d}t+\left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right)\bar{w}_j, \tag{6}$$

而

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\ln[t^{-k}G(t)]}{t-z_j}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k\neq j-1,j}\int_{\Gamma_k}\frac{\ln[t^{-k}G(t)]}{t-z_j}\mathrm{d}t+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{j-1}\cup\Gamma_j}\frac{\ln[t^{-k}G(t)]}{t-z_j}\mathrm{d}t,$$

显然,上式的前 $m-2$ 个积分在通常的意义下可积,而后两个积分取主值. 现在来看这两个主值积分.

以 z_j 为圆心,充分小的正数 ε 为半径作圆交 Γ_{j-1},Γ_j 于 z'_j 和 z''_j 两点,那么这两个积分为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{j-1}\cup\Gamma_j}\frac{\ln[t^{-k}G(t)]}{t-z_j}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi i}\int_{z_{j-1}}^{z_{j+1}}\frac{\ln[t^{-k}G(t)]-\ln[z_j^{-k}G(z_j)]}{t-z_j}\mathrm{d}t+\frac{\bar{w}_j}{2\pi i}\lim_{\delta\to0}\left(\int_{z_{j-1}}^{z'_j}+\int_{z'_j}^{z_{j+1}}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t-z_j}=$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{z_{j-1}}^{z_{j+1}}\frac{\ln[t^{-k}G(t)]-\ln[z_j^{-k}G(z_j)]}{t-z_j}\mathrm{d}t+\frac{\bar{w}_j}{2\pi i}\left(\ln\frac{z_{j+1}-z_j}{z_{j-1}-z_j}+\alpha i\right).$$

所以

$$w^+(z_j)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k\neq j-1,j}\int_{\Gamma_k}\frac{\ln[t^{-k}G(t)]}{t-z_j}\mathrm{d}t+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{j-1}\cup\Gamma_j}\frac{\ln[t^{-k}G(t)]-\ln[z_j^{-k}G(z_j)]}{t-z_j}\mathrm{d}t+$$

$$\frac{1}{2\pi i}\Big[\Big(\ln\frac{z_{j+1}-z_j}{z_{j-1}-z_j}+\alpha i\Big)\Big)+\Big(1-\frac{\alpha}{2\pi}\Big)\Big]\bar{w}_j, \tag{7}$$

现在式(7)中的积分均在通常意义下可积. 按照式(7),若取

$$\tilde{w}^+(z_j)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k\neq j-1,j}\frac{z_{k+1}-z_k}{z_k-z_j}\tilde{w}_k+\frac{1}{2\pi i}\Big[\frac{\tilde{w}_{j-1}-\tilde{w}_j}{z_{j-1}-z_j}(z_j-z_{j-1})+\frac{\tilde{w}_{j+1}-\tilde{w}_j}{z_{j+1}-z_j}(z_{j+1}-z_j)\Big]+\frac{1}{2\pi i}\tilde{w}_j\ln\frac{z_{j+1}-z_j}{z_{j-1}-z_j}+\tilde{w}_j=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k\neq j-1,j}\frac{z_{k+1}-z_k}{z_k-z_j}\tilde{w}_k+\frac{1}{2\pi i}(\tilde{w}_{j+1}-\tilde{w}_{j-1}+2\pi i)+\frac{\tilde{w}_j}{2\pi i}\ln\frac{z_{j+1}-z_j}{z_{j-1}-z_j}. \tag{8}$$

那么,有下面的定理.

定理 1　对 $\delta=\max\limits_{1\le j\le m}|\Gamma_j|$,

则 $$\lim_{\delta\to0}\tilde{w}^+(z_j)=w^+(z_j),$$

且 $$|\tilde{w}^+(z_j)-w^+(z_j)|\le M_1\delta^\mu, \tag{9}$$

这里 M_1 与 μ,k,Γ,G 有关.

证明　由式(7)和式(8)得

$$|w^+(z_j)-\tilde{w}^+(z_j)|\le\frac{1}{2\pi}\sum_{k\neq j-1,j}\int_{\Gamma_k}\left|\frac{\ln[t^{-k}G(t)]}{t-z_j}-\frac{\tilde{w}_k}{z_k-z_j}\right||\mathrm{d}t|+\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma_{j-1}}\left[\frac{\ln[t^{-k}G(t)]-\ln[z_j^{-k}G(z_j)]}{t-z_j}-\frac{\tilde{w}_{j-1}-\tilde{w}_j}{z_{j-1}-z_j}\right]\mathrm{d}t\right|+\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma_j}\left[\frac{\ln[t^{-k}G(t)]}{t-z_j}-\frac{\ln[z_j^{-k}G(z_j)]}{t-z_j}-\frac{\tilde{w}_{j+1}-\tilde{w}_j}{z_{j+1}-z_j}\right]\mathrm{d}t\right|.$$

若注意到当 $k\neq j-1,j$ 时,$\frac{\ln[t^{-k}G(t)]}{t-z_j}\in G_\mu(\Gamma_k)$,所以,

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k\neq j-1,j}\int_{\Gamma_k}\left|\frac{\ln[t^{-k}G(t)]}{t-z_j}-\frac{\tilde{w}_k}{z_k-z_j}\right||\mathrm{d}t|\le\frac{M}{2\pi}\sum_{k\neq j-1,j}|\Gamma_k||z_{k+1}-z_k|^\mu\le M'\delta^\mu.$$

对于上面的第二个积分,由文献[3]中的引理 2.5.2 得

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma_{j-1}}\left[\frac{\ln[t^{-k}G(t)]-\ln[z_j^{-k}G(z_j)]}{t-z_j}-\frac{\bar{w}_{j-1}-\bar{w}_j}{z_{j-1}-z_j}\right]\mathrm{d}t\right|\le\frac{1}{2\pi}\tilde{M}''|\Gamma_{j-1}|^\mu+\frac{1}{2\pi}\tilde{\tilde{M}}''|\Gamma_j|^\mu\le M''\delta^\mu.$$

同理也有

$$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma_j}\left[\frac{\ln[t^{-k}G(t)]-\ln[z_j^{-k}G(z_j)]}{t-z_j}-\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{\bar{w}_{j+1}-\bar{w}_j}{z_{j+1}-z_j}\right]\mathrm{d}t\right| \le M'''\delta^\mu,$$

从而

$|w^+(z_j)-\tilde{w}^+(z_j)| \le (M'+M''+M''')\delta^\mu = M_1\delta^\mu.$

证毕.

令 $\tilde{X}^+(z_j)=\mathrm{e}^{\tilde{w}^+(z_j)}$,则由定理 1 可得

$$\lim_{\delta\to 0}\tilde{X}^+(z_j)=X^+(z_j),$$

且有估计

$$|\tilde{X}^+(z_j)-X^+(z_j)| \le M_2\delta^\mu. \tag{10}$$

现在,以 $\tilde{g}_j=g(z_j)/\tilde{X}^+(z_j)$ 为节点值,构造一次试探函数 $\tilde{G}(t)=\sum_{j=1}^{m}N_j(t)\tilde{g}_j$,易知,$\tilde{G}(t)\in G_\mu(\Gamma)$,于是有定理 2.

定理 2 对于 $\tilde{G}(t)$,有 $\lim\limits_{\delta\to 0}\tilde{G}(t)=g(t)/X^+(t)$,且有估计

$$|\tilde{G}(t)-g(t)/X^+(t)| \le M_3\delta^\mu, \tag{11}$$

这里,M_3 依赖于 $\mu, k, \Gamma, G(t), g(t)$;$\delta=\max\limits_{1\le j\le m}|\Gamma_j|$.

证明 设 $t\in\Gamma_j$,由 $g(t)/X^+(t)\in G_\mu(\Gamma)$ 和估计式(10),则得

$|\tilde{G}(t)-g(t)/X^+(t)| \le |\tilde{G}(t)-\tilde{G}(z_j)| + |g(z_j)/\tilde{X}^+(z_j)-g(z_j)/X^+(z_j)| + |g(z_j)/X^+(z_j)-g(t)/X^+(t)| \le H_1\delta^\mu+H_2\delta^\mu+H_3\delta^\mu \le M_3\delta^\mu.$

证毕.

若令 $$\tilde{f}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\tilde{G}(t)}{t-z}\mathrm{d}t$$

那么有定理 3.

定理 3 对 $z\in D^\pm$,$z\notin\Gamma$ 有 $\lim\limits_{\delta\to 0}\tilde{f}(z)=f(z)$,且

$$|\tilde{f}(z)-f(z)| \le M_4(\mu,k,\Gamma,z,G,g)\delta^\mu. \tag{12}$$

证明 类似于文献[4]中的定理 3.3,略去.

现在,令 $\tilde{F}(z)=\hat{X}(z)\tilde{f}(z)$,并将它作为问题 R 特解 $F_0(z)$ 的近似解.并注意到 $\hat{X}(z)$ 和 $\tilde{f}(z)$ 在 $\bar{D}^\pm$ 上的连续性及 $\tilde{f}(\infty)$,$\hat{X}(\infty)$ 的有界性,通过应用估计式(12)和文献[4]中的定理 3.4,立即可得

定理 4 对 $z\in D^\pm$,$z\notin\Gamma$,有 $\lim\limits_{\delta\to 0}\tilde{F}(z)=F(z)$,且 $|\tilde{F}(z)-F(z)|\le M_5\delta^\mu$,这里 M_5 除了依赖于 μ,k,Γ 和函数 $G(t)$,$g(t)$ 外,还依赖于点 z,且对 z 的依赖关系如文献[4]中定理 3.3 的常数 M_3.

3 误差估计

称函数 $\mathrm{e}(z)=f(z)-\tilde{f}(z)$ 为用 $\tilde{f}(z)$ 逼近 $f(z)$ 的误差函数.显然,$\mathrm{e}(z)$ 在 $D^\pm$ 内解析,在 $D^\pm$ 上连续.设 z_j^+ 是 D^+ 内任意靠近 z_j 的点,那么存在闭折线 Γ^+,它与 Γ 有 η 的距离,且满足 z_j^+ 在 Γ^+ 内.不失一般性,考虑 z_1^+,由 Cauchy 公式,得

$$\mathrm{e}(z_1^+)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{\mathrm{e}(z)}{z-z_1^+}\mathrm{d}z. \tag{13}$$

所以

$$2\pi|\mathrm{e}(z_1^+)| \le \left|\int_{\Gamma_1^+\cup\Gamma_m^+}\frac{\mathrm{e}(z)}{z-z_1^+}\mathrm{d}z\right| + \sum_{j=2}^{m-1}\left|\int_{\Gamma_j^+}\frac{\mathrm{e}(z)}{z-z_1^+}\mathrm{d}z\right| \tag{14}$$

设 z_* 是 Γ_1 的一内点,z_*^+ 是 Γ_1^+ 的内点,显然,z_*^+ 可以任意靠近 z_*,且满足式(13),故也满足式(14),不妨设 z_*^+ 使 $|\mathrm{e}(z_*^+)|=\max\limits_{z\in\Gamma_1^+}|\mathrm{e}(z)|=M_1^+$,并且假设 z_*^+ 已被改变到原点,Γ_1^+ 位于实轴上,则

$$2\pi M_1^+ \le \left|\int_{\Gamma_1^+}\frac{\mathrm{e}(z)}{z-z_*^+}\mathrm{d}z\right| + \sum_{j=2}^{m}\left|\int_{\Gamma_j^+}\frac{\mathrm{e}(z)}{z-z_*^+}\mathrm{d}z\right|, \tag{15}$$

显然,对 $j=2,3,\cdots,m$,有

$$\left|\int_{\Gamma_j^+}\frac{\mathrm{e}(z)}{z-z_*^+}\mathrm{d}z\right| \le \int_{\Gamma_j^+}\frac{|\mathrm{e}(z)|}{|z-z_*^+|}|\mathrm{d}z| \le M_j^+\frac{|\Gamma_j^+|}{d_j^+},$$

其中,d_j^+ 是 z_*^+ 到 Γ_j^+ 的最短距离,

$$M_j^+=\max_{z\in\Gamma_j^+}|\mathrm{e}(z)|.$$

这样式(15)就成为

$$2\pi M_1^+ \le \left|\int_{\Gamma_1^+}\frac{\mathrm{e}(z)}{z-z_*^+}\mathrm{d}z\right| + \sum_{j=2}^{m}M_j^+\frac{|\Gamma_j^+|}{d_j^+}. \tag{16}$$

设 Γ_1^+ 的长度 $|\Gamma_1^+|=l_a+l_b+2\varepsilon$,则

$$\int_{\Gamma_1^+}\frac{\mathrm{e}(z)}{z-z_*^+}\mathrm{d}z=\int_{\Gamma_1^+}\frac{\mathrm{e}(z)}{z}\mathrm{d}z=\int_{-l_a-\varepsilon}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{e}(z)}{z}\mathrm{d}z+\int_{\varepsilon}^{l_b+\varepsilon}\frac{\mathrm{e}(z)}{z}\mathrm{d}z+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\mathrm{e}(z)}{z}\mathrm{d}z, \tag{17}$$

由 $1/z$ 在 $[-l_a-\varepsilon,-\varepsilon]$ 和 $[\varepsilon,l_b+\varepsilon]$ 上的单调性得

$$\left|\int_{-l_a-\varepsilon}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{e}(z)}{z}\mathrm{d}z\right|+\left|\int_{\varepsilon}^{l_b+\varepsilon}\frac{\mathrm{e}(z)}{z}\mathrm{d}z\right| \le M_1^+\left(\ln\frac{l_a+\varepsilon}{\varepsilon}+\ln\frac{l_b+\varepsilon}{\varepsilon}\right). \tag{18}$$

当 $l_a=l_b=|\Gamma_1^+|/2-\varepsilon$ 时,式(18)右边的对数的和取最大值 $\ln\frac{|\Gamma_1^+|}{2\varepsilon}$.而式(18)右边的最后一个积分

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\mathrm{e}(z)}{z}\mathrm{d}z=\mathrm{e}(0)\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}z}{z}+\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\varphi(z)}{z}\mathrm{d}z.$$

在式(17),(18)中,置 $l_a = l_b = |\Gamma_1^+|/2 - \varepsilon$,由式(17)便有

$$\left|\int_{\Gamma_1^+}\frac{e(z)}{z}dz\right| \le 2M_1^+\ln\frac{l_a+\varepsilon}{\varepsilon} + E_1, \quad (19)$$

这里 $E_1 = \left|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{\varphi(z)}{z}dz\right|$.

将式(17)、式(19)代入式(16)得

$$2\pi M_1^+ \le 2M_1^+\ln\frac{l_a+\varepsilon}{\varepsilon} + \sum_{j=2}^{m} M_j^+\frac{|\Gamma_j^+|}{d_j^+} + E_1. \quad (20)$$

为了方便,假设 $\varepsilon = \frac{1}{2}|\Gamma_1^+|e^{1/2-\pi} \approx 0.0356|\Gamma_1^+|$ 时,E_1 可以忽略不计,此时式(20)将变为

$$M_1^+ \le \sum_{j=2}^{m} M_j^+\frac{|\Gamma_j^+|}{d_j^+}. \quad (21)$$

关系式(21)可以用来分析当节点增加时,复变边界元方法的效应.例如假设增加了一个节点 z_a^+,不妨设它是 Γ_1^+ 的中点,那么由式(21)得

$$M_1^+ \le \sum_{j=2}^{m} M_j^+\frac{|\Gamma_j^+|}{d_j^+} + M_m^+\frac{|\Gamma_m^+|}{d_m^+}.$$

新节点 z_a^+ 将 Γ_m^+ 分成 Γ_a^+,Γ_b^+,注意到关系式 $d_m^+ = \min(d_a^+, d_b^+)$,$M_m^+ = \max(M_a^+, M_b^+)$,那么有

$$M_m^+\frac{|\Gamma_m^+|}{d_m^+} \ge M_a^+\frac{|\Gamma_a^+|}{d_a^+} + M_b^+\frac{|\Gamma_b^+|}{d_b^+}.$$

这意味着,当增加一个节点时,误差函数在 Γ_j^+ 上的界不会增大,也就是说,通过增加节点的办法,有可能提高复变边界元方法(CVBEM)的效率.虽然我们是在 Γ^+ 上进行讨论的,但由于 Γ^+ 可以任意地接近 Γ,而误差函数 $e(z)$ 在 $\bar{D}^+$ 上连续,所以上面的结论基本上反映了 $e(z)$ 在边界 Γ 及其附近的行为.至于在 $\bar{D}^-$ 内的讨论,与在 $\bar{D}^+$ 内的讨论类似,本文在此不再赘述.

参考文献:

[1] BREBBIA C A,ORSZAG S A.The complex variable boundary element method[A].BREBBIA C A.Lecture Notes in Engineering[C].New York:Springer-Verlag,1984.

[2] 闻国椿.共形映照与边值问题[M].北京:高等教育出版社,1985.

[3] 路见可.解析函数边值问题[M].上海:上海科技出版社,1987.

[4] 王新艳.齐次 Riemann 边值问题的复变边界元方法[J].焦作工学院学报,2000,18(2):20-22.

Complex Variable Boundary Element Method for Analytic Function Nonhomogeneous Riemannian Boundary-Value Problem

WANG Zu-chao[1], WANG Xin-yan[2]

(1.College of Information Technology,China University of Geosciences,Beijing 100083 China;2.Zhengzhou Polytechnic Institute,Zhengzhou 450007,China)

Abstract:The object of this paper is to find approximate solution of analytic function nonhomogeneous Riemannian boundary-value problem with CVBEM-Complex Variable Boundary Element Method introduced in reference[1], and present error estimate.Error analysis show that bound of error function is nonincreasing with number of nodes increasing.

Key words:analytic function;boundary element;riemannian boundary-value problem