

文章编号 :1007-649X(2000)02-0105-03

用熵讨论任意循环的极限效率

张寅静

(河南纺织高等专科学校物理教研室,河南 郑州 450007)

摘 要 :热机的循环效率极大值问题可由卡诺定理给出结论,即所有循环工作的热机,以卡诺循环的效率为最大.关于它的证明,历来有多种方法,如运用热力学第二定律或  $P-V$  图进行证明.而直接引入态函数熵,利用封闭系统的熵增加原理和  $T-S$  图的外切及分解卡诺循环法,对该问题进行验证,可得出同样的结论,且方法更为简便.

关键词 :熵增加原理 ;卡诺循环 ;极限效率

中图分类号 :O 414.11 文献标识码 :B

0 引言

卡诺循环是热力学中的一项重要内容,它是 1824 年法国工程师卡诺对热机的最大可能效率问题进行理论研究时提出的,曾对热力学第二定律的建立起了决定性的作用.而卡诺定理的一个重要推论,就是给出了任意热机循环效率的极限值<sup>[1]</sup>.关于任意循环的极限效率的证明和讨论,历来有多种方法,而本文提出利用态函数熵的物理意义对该问题进行研究,是最为简单、直观的一种.

1 用  $T-S$  图讨论热机循环效率

在计算热机的循环效率时,利用温熵图(即  $T-S$  图)非常方便.如图 1 中的曲线  $ABCD$  表示任一循环过程,从最左边的  $A$  点和最右边的  $C$  点各作一平行于  $OT$  轴的直线  $AG$  和  $CH$ ,很显然,  $A, C$  分别是吸、放热的分界点.按照熵的物理意义,曲线  $ABCHGA$  所围成的面积表示循环过程的吸热总和,放热总和用曲线  $ADCHGA$  的面积表示,而曲线  $ABCD$  的面积就是系统对外做的净功<sup>[2]</sup>.可见,对任一循环过程,系统所吸收的总热量和所做的功,都可在  $T-S$  图上用面积直观地表示出来.这比  $P-V$  图只能用面积表示功要优越得多,下面仅用  $T-S$  图对任意循环过程的极限效率进行讨论.

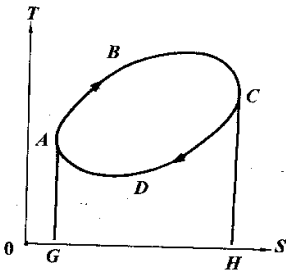


图 1 任意循环过程的  $T-S$  图

1.1 外切卡诺循环法

如图 2 所示,曲线  $ABCD$  表示任一循环过程,设其循环效率为  $\eta'$ ,作外切矩形  $EFGH$ <sup>[2]</sup>,分别和曲线  $ABCD$  相切于  $A, B, C, D$  点.按  $T-S$  图的物理意义,该矩形表示两绝热过程和两等温过程组成的卡诺循环,  $B, D$  分别表示高温热源和低温热源的温度,卡诺循环中的  $EF$  段为吸热过程,  $GH$  段为放热过程,所吸收的热量  $Q_1$  和放出的热量  $Q_2$  分别为矩形  $EFNM$  和  $HGNM$  的面积.  $ABCD$  循环中,  $AC$  段为吸热过程,  $CA$  段为放热过程,所吸收的热量  $Q_1'$  和放出的热量  $Q_2'$  分别等于曲线  $ABCNMA$  和  $ADCNMA$  所围成的面积.对  $AEBFCA$  组成的正循环,  $EF$  段为吸热过程,  $CA$  段为放热过程,因为是正循环,功大于零.显然

$$Q_1 > Q_1',$$

同样,对曲线  $AHDGCA$  组成的逆循环,有

$$Q_2 < Q_2',$$

所以

$$\frac{Q_2}{Q_1} < \frac{Q_2'}{Q_1'}$$

用  $\eta$  表示卡诺循环的效率

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} ; \quad \eta' = 1 - \frac{Q_2'}{Q_1'}$$

由此得

$$\eta > \eta'$$

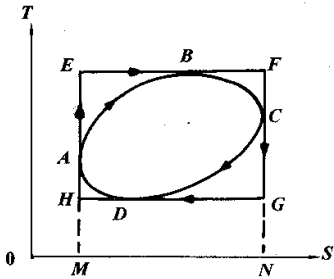


图 2 外切卡诺循环法的  $T-S$  图

1.2 卡诺循环分解法

作为热机原理的一般循环过程,是在一系列不同温度的热源之间吸收热量,如图 3 所示. 闭合曲线  $ABCD$  所示的是一任意的正循环过程,代表任意的可逆热机. 对于任意的可逆循环过程,一般都可近似地认为是由许多微小的卡诺循环组成<sup>[3]</sup>,如图 3 中的小矩形所示. 每个小矩形代表一个微小的卡诺循环,所取的微小卡诺循环的数目越多,小矩形就越小,也就越接近于所研究的可逆循环过程. 从图中可以看出,沿各小矩形正向循环的结果,由于任意两个相邻的微小卡诺循环总有一段绝热线是共同的,但过程的方向相反,从而效果互相抵消. 因此,在极限的情况下,这一连串微小卡诺循环的总效果就是曲线  $ABCD$  表示的循环.

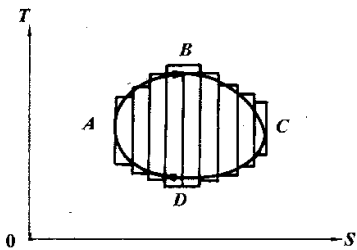


图 3 卡诺循环分解法的  $T-S$  图

设循环过程中,膨胀过程的最高温度为  $T_1$ ,压缩过程的最低温度为  $T_2$ ,若令  $\eta$  代表工作于  $T_1 \sim T_2$  间卡诺热机的效率,显然,任一微小卡诺热机的效率.

$$\eta_i \leq \eta = 1 - T_2/T_1,$$

其中  $i$  表示第  $i$  个微小卡诺循环,其高温热源温

度  $T_{1i} \leq T_1$ ,低温热源温度  $T_{2i} \geq T_2$ ,因此,上式在  $T_{1i} = T_1, T_{2i} = T_2$  时取等号,否则取“ $<$ ”符号.

设第  $i$  个微小卡诺循环在高温热源吸收的热量为  $Q_{1i}$ ,向低温热源放出的热量为  $Q_{2i}$ ,

$$\text{则} \quad \eta_i = 1 - Q_{2i}/Q_{1i} \leq \eta,$$

$$\text{所以} \quad Q_{2i} \geq (1 - \eta)Q_{1i}.$$

因为每一微小卡诺循环都有这样一个表达式,若把它们迭加起来,则有

$$\sum Q_{2i} \geq (1 - \eta) \sum Q_{1i},$$

所以

$$\frac{\sum Q_{1i} - \sum Q_{2i}}{\sum Q_{1i}} \leq \eta ; \quad \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \eta.$$

根据热机效率的定义,上式左端即是可逆热机效率.

由此得出结论:任何可逆热机的效率,不可能大于工作在它对应的最高温度  $T_1$  和最低温度  $T_2$  之间的卡诺热机的效率. 事实上,只要曲线  $ABCD$  是任意的可逆循环,而不是卡诺循环,必有组成它的许多微小卡诺循环的效率取“ $<$ ”符号. 这时,上式只有“ $<$ ”符号成立,这表明,卡诺定理的推广形式是:  $\eta$  是任何可逆热机效率的最高限. 对于不可逆机,按照卡诺定理,其效率更低. 因此可以认为,  $\eta$  也是任何热机效率的最高限.

2 利用熵增加原理讨论

熵增加原理是热力学第二定律的一种表达方式,其具体内容为:对任一封闭系统的状态变化过程,态函数熵总是增加的,即  $S_2 - S_1 \geq 0$ ,对微小的循环过程,有  $dS \geq 0$ . 利用该原理,对前述热机的极限效率问题进行如下讨论.

若热机在循环过程中和高温热源(温度为  $T_1$ )及低温热源(温度为  $T_2$ )交换热量,则热机和两个热源构成一封闭系统. 如果将热力学第一定律应用于热机的微元循环,那么

$$\delta Q_1 - \delta Q_2 - \delta A = 0, \tag{1}$$

式中  $\delta Q_2$  是系统放出的热量,所以加一负号. 此时,循环过程的总熵变为

$$dS = dS_1 + dS_2 + dS_3 \tag{2}$$

式中  $dS_1$  为吸热时高温热源的熵变,  $dS_2$  为放热时低温热源的熵变,  $dS_3$  为热机的熵变. 因为热机经历的是一循环过程,它的熵变为零. 高温和低温热源的熵变值分别为  $-\delta Q_1/T_1$  和  $\delta Q_2/T_2$ ,负号表示热是离开高温热源的. 所以式(2)可写成

$$dS = -\frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} \quad , \quad (3)$$

将式(1)代入式(3),得

$$dS = -\frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_1}{T_2} - \frac{\delta A}{T_2} \quad , \quad (4)$$

整理可得

$$\eta = \frac{\delta A}{\delta Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} - \frac{T_2 dS}{\delta Q_1} \quad , \quad (5)$$

因为  $T_1 > T_2$  ,右边第一项总是在 0 与 1 之间 ,由熵增加原理可知  $dS \geq 0$  ,因此 ,这一项的作用总是使热机的效率减少 ,极限的情况是使热机效率不变 .由式(5)可以看出 ,当  $dS$  为 0 时 ,热机达到最高热效率 .在这一条件下 ,式(3)要求

$$-\delta Q_1/T_1 + \delta Q_2/T_2 = 0 \quad ,$$

对于有限的全部可逆循环 ,上式就变为

$$|Q_1|/T_1 = |Q_2|/T_2 \quad .$$

当热量和温度满足上述关系时 ,达到最高热效率 ,这些情况下的热效率就是

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad ,$$

显然 ,这正是工作于  $T_1$  和  $T_2$  间的卡诺循环的热效率 .与前述用  $T-S$  图讨论的结果相同 ,这是所有工作于  $T_1 \sim T_2$  间的所有循环工作的热机的最大效率 .

### 参考文献 :

- [1] 沃 克 K. 热力学(上册) [M]. 马 元 ,译. 北京 :人民教育出版社 ,1981.
- [2] 熊吟涛. 热力学 [M]. 北京 :人民教育出版社 ,1982. .
- [3] 福里斯 ,季莫列娃. 普通物理学 [M]. 梁宝洪 ,译. 北京 :人民教育出版社 ,1964.

## The Discussion About the Efficiency Limit of Any Cycle by Using Entropy

ZHANG Yin-Jing

( Office of Physics Teaching and Research ,Henan Textile College ,Zhengzhou 450007 ,China )

**Abstract :** The maximum of circle efficiency of heat engine is one of the important contents about the second law of thermodynamics. This can be deduced from Carnot theorem. That is ,the efficiency of Carnot cycle is maximum among all the circulating heat engines. There are various methods to prove this——such as the second law of thermodynamics and  $P-V$  chart. In this article ,a new simple and understandable way is introduced by using state function of entropy directly ,by which the same conclusion can be drawn from principle of entropy increase of closed system , $T-S$  chart and resolution of Carnot cycle. It discusses the limit value of arbitrary cycle efficiency from different angles using the  $T-S$  chart.

**Key words :** entropy increase ; Carnot cycle ; efficiency limit