文章编号:1007－6492(2000)02－0061－03

一类线性串联系统的鲁棒 H∞控制

高继贤,陈铁军

(郑州工业大学电气信息工程学院,河南 郑州 450002)

摘 要:对于单级线性系统的鲁棒 H∞控制器设计,只需求解一个代数 Riccati 方程就能得到其状态反馈阵.运用这样的状态反馈控制,既能保证整个闭环系统是鲁棒稳定的,又能达到抑制干扰的效果.在设计单级线性系统的鲁棒 H∞控制器的基础上,设计出具有串联结构的线性系统的鲁棒 H∞控制器,证明了对于具有两级串联结构的线性系统,可分别设计两个简单的单级系统的鲁棒 H∞控制器,通过求解两个 Riccati 方程,得到整个系统的控制器,此分段设计方法能保证整个系统在 H∞范数界约束下二次型稳定.

关键词:鲁棒 H∞控制;串联系统;分段设计

中图分类号:TP 13 文献标识码:A

0 引言

线性系统的鲁棒 H∞控制器设计,大多基于 ARE 方法,理论上已趋于成熟,但很多实际的工业对象具有串联结构特性,文献[1,2]研究了此类系统的分段预估控制.本文讨论具有两级串联结构的线性系统的鲁棒 H∞控制,证明了在一定条件下分别设计两个简单系统的控制器,能确保整个串联系统在 H∞范数界约束下二次型稳定.

1 问题描述

考虑如下串联对象:

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix},$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1(t)=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1(t)+\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{u}_1(t)+\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{\omega}_1(t),\tag{1}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}_2(t)=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2(t)+\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{u}_2(t)+\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{\omega}_2(t),\tag{2}$$

$$\boldsymbol{z}(t)=\begin{bmatrix}z_1(t)\\z_2(t)\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t),$$

$$\boldsymbol{z}_1(t)=\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{x}_1(t),\tag{3}$$

$$\boldsymbol{z}_2(t)=\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{x}_2(t).\tag{4}$$

对于系统(1),构造线性状态反馈控制器:

$$\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{x}_1(t),\tag{5}$$

$$\boldsymbol{K}_1=-\frac{1}{\varepsilon_1}\boldsymbol{R}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}_1(t).\tag{6}$$

对于系统(2),构造线性状态反馈控制器:

$$\boldsymbol{x}_1(t)=\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{x}_2(t);\tag{7}$$

$$\boldsymbol{K}_2=-\frac{1}{\varepsilon_2}\boldsymbol{R}_2^{-1}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{x}_2(t),\tag{8}$$

其中:$\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 为正标量,正定矩阵 $\boldsymbol{R}_1\in\boldsymbol{R}^{n0\times n0}$,$\boldsymbol{R}_2\in\boldsymbol{R}^{n1\times n1}$,待定正定对称矩阵 $\boldsymbol{R}_1\in\boldsymbol{R}^{n1\times n1}$,$\boldsymbol{R}_2\in\boldsymbol{R}^{n2\times n2}$.将式(7)代入式(5),则

$$\boldsymbol{u}_1(t)=\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{x}_2(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_2(t).$$

故鲁棒 H∞控制器设计可以表示为:分别确定 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$,从而确定 $\boldsymbol{K}_1,\boldsymbol{K}_2$,使整个闭环系统在 H∞范数界 γ 约束下二次稳定.

2 主要结果[3~7]

考虑单级系统:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{\omega}(t),$$

$$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}(t),$$

构造线性状态反馈控制器:

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t),$$

从 ω 到 z 的闭环传递函数为

$$T_{z\omega}(s)=\boldsymbol{E}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^{-1}\boldsymbol{D}.$$

线性确定系统的鲁棒稳定控制设计问题可表示为构造一个控制器 $u(t)$,使系统闭环渐近稳

收稿日期:1999－12－13;修订日期:2000－01－30

基金项目:河南省科技攻关项目(981120104)

作者简介:高继贤(1971－),女,吉林省扶余县人,郑州工业大学硕士研究生.

万方数据

定,其中 γ 是一预先给定的好的正标量,则

$$\| T_{z\omega} \|_{\infty} \leqslant \gamma .$$

定理 1 对于上述系统,采用控制律

$$\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) \tag{9}$$

时,闭环系统是渐近稳定的,其中 ε 是一正标量,$\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{R}$ 是正定矩阵且满足如下矩阵不等式

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} - \frac{2}{\varepsilon}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} < 0 \ , \tag{10}$$

证明 当采用控制律式(9)时,在无扰动情况下,系统可写成

$$\dot{\boldsymbol{x}}(u) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) - \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}(t) .$$

采用 Lyapunov 函数

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} \ ,$$

若有式(10)成立,则有

$$\dot{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}) < 0 \ ,$$

因此闭环系统是鲁棒稳定的.

定理 2 给定正常数 γ,假设对于正标量 ε 和正定矩阵 $\boldsymbol{R}$ 和 $\boldsymbol{Q}$,ARE(代数 Riccati 方程)

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} - \frac{2}{\varepsilon}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} + \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} = -\varepsilon\boldsymbol{Q} \tag{11}$$

有正定解 $\boldsymbol{P}$ 存在,则采用式(9)时,闭环系统是鲁棒渐近稳定的,且闭环系统传递函数 $T_{z\omega}(s)$ 的 H_{∞} 范数不大于 γ,即 $\| T_{z\omega} \|_{\infty} \leqslant \gamma$.

证明 根据定理 1,控制器式(9)使系统鲁棒渐近稳定. 记

$$S(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{j}\omega\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} \ ,$$

$$T(\mathrm{j}\omega) = \boldsymbol{E}(\mathrm{j}\omega\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \frac{1}{\varepsilon}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P})^{-1}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}S^{-1}\boldsymbol{D} ,$$

由式(11)得

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E} &= -\varepsilon\boldsymbol{Q} - \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + S^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}S - \\ &\quad (\boldsymbol{P}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} - \frac{2}{\varepsilon}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + S^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \\ &\quad \boldsymbol{P}S) = -\varepsilon\boldsymbol{Q} - \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + S^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}S \ ,\end{aligned}$$

$$T_{z\varepsilon}^{\mathrm{T}}(\mathrm{j}\omega)T_{z\omega}(\mathrm{j}\omega) = \gamma\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}S^{-\mathrm{T}}(-\varepsilon\boldsymbol{Q} - \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + S^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}S)S^{-1}\boldsymbol{D} \leqslant \gamma^2\boldsymbol{I} .$$

所以

$$\| T_{z\omega} \|_{\infty} \leqslant \gamma .$$

证毕.

万方数据

定理 3 对于两级串联系统,分别设计式(1)、式(3)及式(2)、式(4)组成的两个系统的控制器式(5)和式(7),能使整个闭环系统(1~4)二次稳定并且满足闭环传递函数 $\| T_{z\omega} \|_{\infty} \leqslant \gamma$.

证明 根据定理 2,给定正常数 γ_1,如果对于正标量 ε_1 和正定矩阵 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{Q}_1$,ARE 为

$$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1 - \frac{2}{\varepsilon_1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{R}_1^{-1}\boldsymbol{B}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1 + \frac{1}{\gamma_1}\boldsymbol{E}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_1 + \frac{1}{\gamma_1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1 = -\varepsilon_1\boldsymbol{Q}_1 \tag{12}$$

有正定解 $\boldsymbol{P}_1$ 存在,则采用式(5)时,与式(1),式(3)组成的闭环系统是鲁棒渐近稳定的,且闭环系统传递函数 $T_{z_1\omega_1}(s)$ 的 H_{∞} 范数不大于 γ_1,即

$$\| T_{z_1\omega_1} \|_{\infty} \leqslant \gamma_1 .$$

同样,根据定理 2,给定正常数 γ_2,如果对于正标量 ε_2 和正定矩阵 $\boldsymbol{R}_2$ 和 $\boldsymbol{Q}_2$,ARE 为

$$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2 - \frac{2}{\varepsilon_2}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{R}_2^{-1}\boldsymbol{B}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2 + \frac{1}{\gamma_3}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2 + \frac{1}{\gamma_2}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{D}_2\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2 = -\varepsilon_2\boldsymbol{Q}_2 \tag{13}$$

有正定解 $\boldsymbol{P}_2$ 存在,则采用式(7)时,与式(2)、式(4)组成的闭环系统是鲁棒渐近稳定的,且闭环系统传递函数 $T_{z_2\omega_2}(s)$ 的 H_{∞} 范数不大于 γ_2,即

$$\| T_{z_2\omega_2} \|_{\infty} \leqslant \gamma_2 .$$

采用 Lyapunov 函数

$$\boldsymbol{V}(x) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(t) \quad \boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}(t)]\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_1 & \\ & \boldsymbol{P}_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1(t) \\ \boldsymbol{x}_2(t)\end{bmatrix} = \boldsymbol{V}_1(x) + \boldsymbol{V}_2(x) \ ,$$

其中,

$$\boldsymbol{V}_1(x) = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{x}_1 ,$$

$$\boldsymbol{V}_2(x) = \boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{x}_2 .$$

根据定理 1,在定理 3 的条件下,有

$$\dot{\boldsymbol{V}}_1 < 0 ; \qquad \dot{\boldsymbol{V}}_2 < 0 ;$$

$$\dot{\boldsymbol{V}}(x) = \dot{\boldsymbol{V}}_1(x) + \dot{\boldsymbol{V}}_2(x) < 0 .$$

则闭环系统是二次稳定的.

$$\begin{aligned}T_{z\omega} &= T_{z_2\omega_1} = \boldsymbol{E}_2(\boldsymbol{SI} - \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{K}_1)^{-1}\cdot \\ &\quad (\boldsymbol{SI} - \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{K}_2)^{-1}\boldsymbol{D}_1 = \boldsymbol{E}_2S_1^{-1}S_2^{-1}\boldsymbol{D}_1 ;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_{z\omega}^{\mathrm{T}}T_{z\omega} &= \boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}S_2^{-\mathrm{T}}S_1^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2S_1^{-1}S_2^{-1}\boldsymbol{D}_1 = \\ &\quad \boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}S_2^{-\mathrm{T}}S_1^{-\mathrm{T}}S_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2^{\mathrm{T}}S_2^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}_2S_2^{-1}\boldsymbol{D}_2\cdot \\ &\quad \boldsymbol{D}_2^{-1}S_2S_1^{-1}S_2^{-1}\boldsymbol{D}_1 \leqslant \boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}S_2^{-\mathrm{T}}S_1^{-\mathrm{T}}S_2^{\mathrm{T}}\cdot \\ &\quad \boldsymbol{D}_2^{-\mathrm{T}}\gamma_2^{\,2}\boldsymbol{D}_2^{-1}S_2S_1^{-1}S_2^{-1}\boldsymbol{D}_1 \leqslant \gamma_2^2\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\cdot \\ &\quad S_2^{-\mathrm{T}}S_1^{-\mathrm{T}}S_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_2^{-1}S_2S_1^{-1}S_2^{-1}\boldsymbol{D}_1 \leqslant \gamma^2\boldsymbol{I} ,\end{aligned}$$

其中:γ 是一给定正标量.

整个闭环系统二次稳定，并且满足闭环传递函数

$$\| T_{z\omega} \|_\infty \leqslant \gamma .$$

证毕.

3　仿真例子

考虑对象：

$$\dot{x}_1(t) = -1.1765 x_1(t) + u_1(t) + D_1 \omega_1(t) ;$$

$$\dot{x}_2(t) = -1.5873 x_2(t) + x_1(t) + D_2 \omega_2(t) ;$$

$$z_1(t) = 1.1765 x_1(t) ;$$

$$z_2(t) = 0.4762 x_2(t) ;$$

其中，ω_1，ω_2 均取 0.5 − rand(0～1 分布的随机干扰). 参数 $\varepsilon_1 = 0.2$，$\varepsilon_2 = 0.2$，$R_1 = 0.2I$，$R_2 = 0.2I$，$\gamma_1 = 1$，$\gamma_2 = 1$ 时，求得控制器参数 $K = 3.8569$. D_1，D_2 同时分别取 0.1 的闭环阶跃响应如图 1.

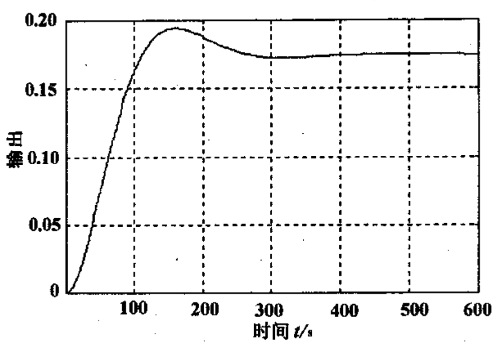

图 1　闭环响应曲线

4　结论

在对一个复杂的工业系统建立线性串联的状态模型的前提下，分别解两个 Riccati 方程，求得各自的状态反馈控制器，从而得到整个系统的状态反馈控制器. 仿真实验结果表明：这种方法可以保证整个闭环系统二次稳定并且满足闭环传递函数 $\| T_{z\omega} \|_\infty$ 小于给定的正数；且参数 ε_1，ε_2，R_1，R_2，γ_1，γ_2 取不同值时，求得控制器参数 K 也不相同，但只要满足上述定理的条件，就可保证整个闭环系统二次稳定并且满足闭环传递函数 $\| T_{z\omega} \|_\infty$ 小于给定的正数.

参考文献：

[1]　陈铁军，邱祖康. 一类大时间滞后系统的预估[J]. 自动化学报，1989，15(6)：487 − 492.

[2]　陈铁军，邱祖康. 串联时滞系统的预估控制及其应用[J]. 控制理论与应用，1989，15(6)：95 − 100.

[3]　申铁龙. H_∞ 控制理论及应用[M]. 北京：清华大学出版社，1996.

[4]　翁正新，王广雄，姚一新. 鲁棒 H_∞ 状态反馈控制[J]. 控制理论与应用，1994，11(4)：456 − 459.

[5]　王景成，顾永如，王守臣，等. 一类具有状态及控制滞后的不确定系统的鲁棒 H_∞ 控制[J]. 控制理论与应用，1999，16(2)：275 − 278.

[6]　苏宏业，褚　健. 一类不确定时滞系统的鲁棒 H_∞ 控制器设计[J]. 自动化学报，1998，24(4)：566 − 569.

[7]　倪茂林，湛　颖. 线性时滞不确定系统的鲁棒稳定控制[J]. 自动化学报，1996，22(6)：727 − 730.

Robust H_∞ Control of a Type of Linear Series Systems

GAO Ji − xian，CHEN Tie − jun

(College of Electrical and Information Engineering，Zhengzhou University of Technology，Zhengzhou 450002，China)

Abstract：About robust H_∞ controller design for mono linear system，the solution to the problem only involves solving an algebraic Riccati equation，and according to the algebraic Riccati equation，the state feedback matrix can be obtained. Such state feedback control can ensure that the whole closed − loop system is stable and achieve optimal H_∞ disturbance attenuation. On the basis of mono linear system robust H_∞ controller，robust H_∞ controller for a type of linear series systems is designed. It proved that controller for dual series linear system can be designed. The solution to the problem only involves two algebraic Riccati equations to design respectively two simple mono controllers，and the segmental designed controller can ensure quadratic stability for the whole system on the scope of H_∞ norm. A simulation example proves that this conclusion is right.

Key words：H_∞ control；series systems；segmental design

万方数据