文章编号:1007 - 6492(2000)02 - 0037 - 03

线性规划辅助问题的讨论

臧振春

(河南财经学院计算机科学系,河南 郑州 450002)

摘　要:对于复杂的线性规划问题,求解第一个可行基与对应的单纯形表时,可引入人工变量,构造原问题的辅助问题并进行处理.当辅助问题为非退化时,问题已得到解决;当辅助问题为退化的线性规划时,利用代数理论及单纯形方法,寻找原问题的第一个可行基和对应的单纯形表.

关键词:人工变量;基;基可行解;最优基

中图分类号:O 221.1　　文献标识码:A

1　辅助问题的引入

设线性规划问题的标准形式为:

$$\min S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0 (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}, \qquad (1)$$

对原问题加入人工变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$,并构造仅含人工变量且实现最小化的目标函数,即引入下面的辅助问题[1]:

$$\min Z = y_1 + y_2 + \cdots + y_m;$$

$$\begin{cases} y_1 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ y_2 + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ y_m + a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ y_j \geq 0, x_k \geq 0 (j = 1, 2, \cdots, m; k = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}, \quad (2)$$

命题 1　辅助问题一定有最优解,且最优值 $\min Z \geq 0$.

事实上,在辅助问题中,以 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 为基变量,则它们对应的单纯形表如表 1 所示.所构造的可行基对应的基可行解为

$$\boldsymbol{X} = (b_1, b_2, \cdots, b_m, 0, 0, \cdots \quad, 0)^{\mathrm{T}}.$$

又因为 $\qquad y_1, y_2, \cdots, y_m \geq 0,$

所以 $\qquad \min Z = y_1 + y_2 + \cdots + y_m \geq 0.$

即目标函数有界.若辅助问题是非退化的,则从所选基 B 开始,应用单纯形方法,必可求得辅助问题的最优基 B^* 和最优解;若辅助规划问题是退化的,则利用摄动法,同样可求出辅助问题的最优基和最优解[2].

表 1　单纯形表

		y_1	y_2	$\cdots$	y_m	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Z	$\sum_{i=1}^{m} b_i$	0	0	$\cdots$	0	$\sum_{i=1}^{m} a_{i1}$	$\sum_{i=1}^{m} a_{i2}$	$\cdots$	$\sum_{i=1}^{m} a_{in}$
S	0	0	0	$\cdots$	0	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$
y_1	b_1	1	0	$\cdots$	0	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}
y_2	b_2	0	1	$\cdots$	0	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}
$\cdots$	$\cdots$			$\cdots$		$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
y_m	b_m	0	0	$\cdots$	1	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}

命题 2　如果最优基 B^* 对应的目标函数 $Z^* > 0$,则原线性规划问题无可行解[2].

事实上,反设原线性问题有可行解

$$x_1 = d_1; x_2 = d_1; \cdots; x_n = d_n,$$

将其代入式(2),可得

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0.$$

令 $$S_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j d_j,$$

则 $$y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0;$$

$$x_1 = d_1, x_2 = d_2, \cdots, x_n = d_n$$

是辅助问题的可行解.此时目标函数 $Z = 0$,显然与已知条件 $\min Z = Z^* > 0$ 相悖,故原问题无可行解.

如果最优基 B^* 对应的基变量全部是 x 变量,则显然有以下结论:

收稿日期:2000 - 01 - 10;修订日期:2000 - 02 - 30

作者简介:臧振春(1964 -)男,河南省方城县人,河南财经学院副教授,主要从事数理经济方面的研究.

命题 3　如果最优基 B^* 对应的目标函数 $Z^*=0$，且 B^* 对应的基变量全为 x 变量，则 B^* 即为原问题的可行基.

在辅助问题的最优基 B^* 对应的单纯形表中，去掉 y 变量对应的 m 列及辅助问题目标函数行，就得到原线性规划问题的一个可行基对应的单纯形表.

2　对辅助问题的讨论

如果最优基 B^* 对应的目标函数值 $Z^*=0$，且 B^* 对应的基变量含有 y 变量，则会出现下面两种情况[3]，针对这两种情况，分别除去基变量中的 y 变量.

因为

$$Z^*=0, Z^*=y_1^*+y_2^*+\cdots+y_m^*=0,$$

而

$$y_1^*\geq 0, y_2^*\geq 0,\cdots, y_m^*\geq 0,$$

故

$$y_1^*=y_2^*=\cdots=y_m^*=0,$$

即最优解中 y 变量的值全为 0. 设在 B^* 对应的基变量中含有变量 y_r，B^* 对应的单纯形表中，y_r 对应的方程为

$$y_r+\sum_k b_{rk}y_k+\sum_j b_{rj}x_j=0, \tag{3}$$

其中：y_r 为基变量；y_k, x_j 均为非基变量.

第一种情况：在上面的方程(3)中，若非基变量 x_j 的所有系数 $b_{rj}=0$，则式(3)即为

$$y_r=\sum_k b_{rk}y_k.$$

这表明：原规划(1)的约束方程组中，第 r 个方程为多余方程，在 B^* 对应的单纯形表中，可将第 r 行和 y_r 对应的列划去，去掉 y_r.

第二种情况[4]：

命题 4　在方程(3)中，若非基变量 x_j 的系数至少有一个不为 0，不妨设 $b_{rs}\neq 0$，则以 b_{rs} 为轴心项，进行换基迭代，可得新基 B^*.

证明：设

$$B^*=(q_{i_1},q_{i_2},\cdots,q_{i_{r-1}},q_r,q_{i_{r+1}},\cdots,q_{i_k},p_{j_1},p_{j_2},\cdots,p_{j_l}),$$

其中，q_i 为 y_i 的系数列向量；p_j 为 x_j 的系数列向量；$k+l=m$.

现在证明，把 p_s 添加到基 B^* 中去，并且从基中把 q_r 取出来后，得到的 $\bar{B}^*=(q_{i_1},q_{i_2},\cdots,q_{i_{r-1}},p_s,q_{i_{r+1}},\cdots,q_{i_k},p_{j_1},p_{j_2},\cdots,p_{j_l})$ 仍是基，也就是证明 $\bar{B}^*$ 中的列向量线性无关.

因为 B^* 中的列向量线性无关，所以只须证明 B^* 中的列向量能被 $\bar{B}^*$ 中的列向量线性表出即可.

在 B^* 对应的典式中，设与 y_i 对应的系数列向量为 q'_i，与 x_j 对应的系数列向量为 p'_j，则显然有

$(q'_{i_1},q'_{i_2},\cdots,q'_{i_{r-1}},q'_r,q'_{i_{r+1}},\cdots,q'_{i_k},p'_{j_1},p'_{j2},\cdots,p'_{j_l})=$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

即每个列向量均为单位列向量.

$$p'_s=(B^*)^{-1}p_s=(b_{1s},b_{2s},\cdots,b_{rs},\cdots,b_{ks},\cdots,b_{ms})^{\mathrm{T}}=b_{1s}q'_{i_1}+b_{2s}q'_{i_2}+\cdots+b_{rs}q'_r+\cdots+b_{ks}q'_{i_k}+b_{k+1s}p'_{j1}+\cdots+b_{ms}p'_{jl}. \tag{4}$$

因为 $b_{rs}\neq 0$，所以两边同除以 b_{rs} 并移项得

$$q'_r=-\frac{b_{1s}}{b_{rs}}q'_{i_1}-\frac{b_{2s}}{b_{rs}}q'_{i_2}-\cdots+\frac{1}{b_{rs}}p'_s-\cdots-\frac{b_{ks}}{b_{rs}}q'_{i_k}-\frac{b_{k+1s}}{b_{rs}}p'_{jl}-\cdots-\frac{b_{ms}}{b_{rs}}p'_{jl},$$

但 $q'_i=(B^*)^{-1}q_i$，$p'_j=(B^*)^{-1}p_j$，在式(4)两边同乘以(B^*)，就得到

$$q_r=-\frac{b_{1s}}{b_{rs}}q_{i_1}-\frac{b_{1s}}{b_{rs}}q_{i_2}-\cdots+\frac{1}{b_{rs}}p_s-\frac{b_{ks}}{b_{rs}}q_{i_k}-\frac{b_{k+1s}}{b_{rs}}p_{j_1}-\cdots-\frac{b_{ms}}{b_{rs}}p_{i_1},$$

即 q_r 可用 $\bar{B}^*$ 中的列向量线性表出. 显然，B^* 中其余的列向量也可由 $\bar{B}^*$ 中的列向量线性表出，故 $\bar{B}^*$ 中的列向量也线性无关，即 $\bar{B}^*$ 也是一个基.

由于 B^* 对应的基可行解中，基变量 $y=0$，故经过换基迭代，新基 $\bar{B}^*$ 对应的基可行解与 B^* 对应的基可行解完全相同，从而，目标函数值也相同，故 $\bar{B}^*$ 也是最优基.

经过有限次这样的换基迭代，一定可以全部去掉基变量中的 y 变量，使基变量全部变为 x 变量，这样便可以按命题 3 处理.

例　求线性规划问题

$$\min s=-3x_1+x_2+x_3;$$

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=11 \\ -4x_1+x_2+2x_3-x_5=3 \\ -2x_1+x_3=1 \\ x_1,\cdots x_5\geqslant 0 \end{cases}$$

的初始可行基.

解　引入辅助问题

$$\min Z=y_1+y_2+y_3;$$

$$\begin{cases} S+3x_1-x_2-x_3=0 \\ y_1+x_1-2x_2+x_3+x_4=11 \\ y_2-4x_1+x_2+2x_3-x_5=3 \\ y_3-2x_2+x_3=1 \\ y_1,y_2,y_3\geqslant 0,x_1,\cdots,x_5\geqslant 0 \end{cases},$$

取 $B_1=(P_1,P_2,P_3,P_4)$ 为基；S,y_1,y_2,y_3 为基变量，对应 B_1 的单纯形表见表 2. 换基迭代最终找辅助问题的最优基见表 3.

目标函数 $Z=0$，检验数已无正数，基变量中又无 y 变量，于是得到原规划问题的初始可行基为 $B=(P_4\ P_2\ P_3)$，基变量为 $x_4,x_2\ x_3$.

表 2　B_1 单纯形表

Z	15	0	0	0	0	−5	−1	4	1	−1
S	0	1	0	0	0	3	−1	−1	0	0
y_1	11	0	1	0	0	1	−2	1	1	0
y_2	3	0	0	1	0	−4	1	2	0	−1
y_3	1	0	0	0	1	−2	0	$\boxed{1}$	0	0

表 3　最终单纯形表

Z	0	0	−1	−1	−1	0	0	0	0	0
S	2	1	0	1	−1	1	0	0	0	−1
X_4	12	0	1	2	−5	3	0	0	1	−2
X_2	1	0	0	1	−2	0	1	0	0	−1
X_3	1	0	0	0	1	−2	0	1	0	0

参考文献：

[1] 甘应爱，田　丰，李维铮，等. 运筹学[M]. 北京：清华大学出版社，1990.

[2] 管梅谷. 线性规划[M]. 济南：山东科学技术出版社，1983.

[3] 胡运权. 运算学[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1985.8 – 25.

[4] 龚德恩. 线性代数[M]. 成都：四川人民出版社，1995.42 – 73.

On the Auxiliary problems of Linear Programming

ZANG Zhen – chun

(Department of Computer Science，Henan Institute of Finance & Economics，Zhengzhou 450002，China)

Abstract：When it comes to the complicated linear programming，the first feasible base and its corresponding simple tableau can be found with the help of artificial variables and the construction of auxiliary problems related to the original ones. When the auxiliary problem is non – degenerate，the original one is solved. This paper，by means of algebraic theory and simple method，mainly deals with how to find the first feasible base of the original problem and its corresponding simple tableau，when the auxiliary problem is degenerate linear programming.

Key words：artificial variable；base；basic feasible solution；optimal base